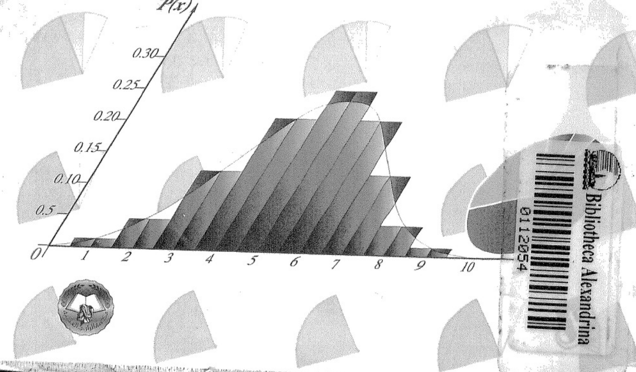


مبادئ الإحصاء

Elementary Statistics

بروفسور
عوض منصور

الأستاذ
عزام صبري





﴿ وَقُلِ اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ ﴾

صدق الله العظيم

مبادئ الإحصاء

مبـــادئ الإحصـــاء

تأليف

البروفيسور عوض منصور   الأستاذ عزام صبري

الطبعة الاولـــى

٢٠٠٠م - ١٤٢٠هـ

دار صفاء للنشر والتوزيع - عمان

رقم الايداع لدى دائرة المكتبة الوطنية (١٣٦٦/٨/١٩٩٩)

رقـــــم التصنيــــف : ٥١٩
المؤلف ومن هو في حكمه : عوض منصور، عزام صبري
عنـــــوان الكتـــاب : مبادئ الاحصاء
الموضـــــوع الرئيـــسي: ١- العلوم الطبيعية
٢- الاحصاء
بيانـــــات النـــشـــر : عمان: دار صفاء للنشر والتوزيع
* - تم اعداد بيانات الفهرسة الأولية من قبل دائرة المكتبة الوطنية

الطبعة الأولى

2000 م - 1420 هـ



دار صفـــاء للنشر والتوزيع

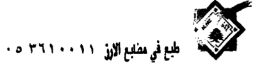
عمان - شارع السلط - مجمع الفحيص التجاري - هاتف وفاكس ٤٦١٢١٩٠

ص.ب ٩٢٢٧٦٢ عمان - الاردن

DAR SAFA Publishing - Distributing

Telefax: 4612190 P.O.Box: 922762 Amman - Jordan

ISBN - 9957 - 402 - 40 - 3 ردمك



طبع في مطابع الارز ٠٥٣٦١٠٠١١

بين يدي الكتاب

الحمد لله والصلاة والسلام على خير الأنام ورسول البشرية محمد وعلى آله وصحبه اجمعين وبعد.

من فضل الله ومنته وكرمه ان يمن علينا باصدار سلسلة جديدة في الإحصاء والعلوم الرياضية المبرمجة بلغة مختلفة من لغات الحاسوب بعد سلسلتنا في الحاسبات الالكترونية التي لاقت رواجاً وانتشاراً واسعاً في الجامعات والكليات والمعاهد في انحاء الوطن العربي.

ونأمل ان تتوالى أعداد هذه السلسلة كأختها لتقديم ما يحتاجه طلابنا في الجامعات والكليات من مفاهيم ومبادئ اساسية في الإحصاء والعلوم الرياضية المبرمجة وحرصنا في هذا الكتاب على اغناءه ببرامج الحاسبات لمعظم الطرق الإحصائية وكيفية الوصول إلى نتائج احصائية من خلال استخدام الطالب للحاسوب كما أغنينا الكتاب بمزيد من الأمثلة والتمارين حتى تكون عونا للطالب لتبسيط المحتوى.

ويكفي ان نذكر ان جميع الشعائر التعبدية في ديننا الحنيف مرتبطة ارتباطا وثيقا بالرياضيات والإحصاء بأعداد ركعاتها وفي التسابيح ونظام الزكاة والحج وبعدد مرات الطواف والسعي بين الصفا والمروة... الخ.

وقبل الختام نود ان نشكر جميع الأخوة الذين ساهموا في اخراج هذا الكتاب إلى حيز الوجود هذا وإننا نأمل من الأخوة الزملاء أن لا يبخلوا علينا في ابداء رأيهم

أو ملاحظاتهم القيمة حتى نستطيع العمل على تلافيها من خلال الطبعات القادمة وفي الختام نسأل الله ان يكون هذا الكتاب خالصا لوجه الله الكريم وأن يكون من العلم الذي ينتفع به.

المؤلفان

1999/8/20

المحتويات

الفصل الثالث
مقاييس التشتت

الفصل الرابع
العزوم والتفرطح

الفصل الخامس
التوزيع الطبيعي

الفصل السادس
الاحتمالات

الفصل السابع
الارتباط والانحدار

الفصل الثامن
السلاسل الزمنية

الفصل التاسع
الأرقام القياسية

الفصل العاشر
الاحصاءات الحيوية

الفصـــل الأول

جمع البيانات وعرضها

1 - 1) مقدمة :

الطريقة الإحصائية تعتبر من أهم الطرق التي يقوم عليه مفهوم علم الإحصاء وقبل التعرف على مفهوم هذه الطريقة لابدَّ من التعرف على بعض التعريفات التي تفيد في هذا المجال.

تعريف: علم الإحصاء علم يبحث في جمع البيانات وتنظيمها وتلخيصها وعرضها ثم تحليل البيانات من أجل الوصول إلى نتائج تفيد في اتخاذ القرارات عند ظهور حالات عدم التأكد.

ولاحقاً صنفه العلماء والمهتمين به إلى صنفين:

تعريف: علم الإحصاء الوصفي هو العلم الذي يساعد في تصنيف وتلخيص وعرض البيانات.

تعريف: علم الإحصاء التحليلي هو العلم الذي يختص في تحليل البيانات المجموعة والملخصة بهدف الوصول إلى نتائج تفيد في اتخاذ القرارات عند ظهور حالة عدم التأكد.

تعريف: الطريقة الإحصائية هي مجموعة الطرق العلمية لجمع البيانات وتبويبها وعرضها ووصفها وتحليلها بهدف استخدام النتائج المنطقية عن الظاهرة قيد البحث.

وتعتمد الطريقة الإحصائية على عناصر أهمها:

أ) جمع البيانات : قبل أن نقوم بهذه العملية علينا مراعاة مايلي:

1) تحديد المعلومات المراد جمعها عن الظاهرة بدقة ووضوح.

2) التعرف على جميع المحاولات السابقة لدراسة الظاهرة أو الظواهر المشابهة لها حتى نتجنب الازدواجية في العمل ونتعرف على الصعوبات التي واجهت الباحثين ونقوم بتذليلها.

3) أن تكون التكلفة لجمع البيانات قليلة إلا في الحالات الإستثنائية.

4) أن تكون المعلومات صحيحة ودقيقة حتى تكون النتائج التي يتوصل إليها الباحث صحيحة.

1 - 2) مصادر جمع البيانات

يمكن الحصول على المعلومات من مصدرين:

1) المصادر المباشرة.

2) المصادر غير المباشرة.

1-2-1 :المصادر المباشرة(الميدانية)

وهي الحصول على المعلومات من مصادرها الأصلية وذلك عن طريق الإتصال بمفردات المجتمع قيد البحث مباشرة من خلال توجيه الأسئلة إما عبر المقابلة الشخصية أو التلفون أو المراسلة وسنتكلم عن كل منها بإيجاز:

*** المقابلة الشخصية:** وتتم هذه المقابلة بواسطة أشخاص مدربين على القيام بهذه الأعمال ويقوم الباحث المدرب بطرح أسئلة محددة ومعدة مسبقا على الشخص المقصود ويسجل الإجابة عن هذه الأسئلة.

ومن مميزات المقابلة الشخصية الحصول على معلومات دقيقة ويستطيع الباحث

الذي يقوم بطرح الأسئلة توضيح أي غموض أو التباس قد تكون موجودة في الأسئلة. وأما عيوبها فهي التكلفة العالية والتحيز الناتج عن تأثير جامع البيانات على الشخص المبحوث سواء كان بقصد أم بغير قصد.

** **التلفون:** ويستخدم كوسيلة أيضا مباشرة وهو غير مكلف لكنه غير متوفر لدى الجميع مما يجعل عملية جمع البيانات مقتصرة على من يملكونه وهه هي أهم عيوب هذه الطريقة.

*** **المراسلة:** ويتم جمع المعلومات عن طريق إرسال استمارة إحصائية إلى الشخص المبحوث عبر البريد، ومن مميزاتها التكلفة القليلة ولكن يعاب عليها احتمال عدم رد الإستمارة إلى الجهة المصدرة لها.

ويقوم الباحث بجمع البيانات على استمارة إحصائية، والإستمارة الإحصائية عبارة عن صحيفة يوجد بها أسئلة وبجانب كل سؤال يوجدفراغ حتى يستطيع الباحث أو المجيب من وضع الإجابة بجانب السؤال وقد قسم الإحصائيون الإستمارات الإحصائية حسب طريقة تعبئة الإستمارة إلى نوعين:

1) كشف البحث: وهو الكشف الذي يقوم الباحث بتعبئته بنفسه

2) صحيفة الإستبيان: وهي التي يقوم الشخص المبحوث بملئها وتسلم إليه إما باليد أو عن طريق البريد ويرفق معها شرح للأسئلة الموجودة بها وكذلك مغلف ملصق عليه الطوابع حتى يشجع الشخص المبحوث على إرجاع صحيفة الإستبيان إلى الجهة المصدرة، ويعاب عليها عدم تجاوب بعض المبحوثين واقتصارها على الأشخاص الملمين بالقراءة والكتابة.

1- 2- 1 : المصادر غير المباشرة (التاريخية)

هي بيانات معدة مسبقا عن ظاهرة ما وباستطاعة الباحث الرجوع إليها وأخذ المعلومات المطلوبة مثل دائرة الاحصاءات العامة ودائرة الأحوال المدنية والوزارات والمؤسسات الخاصة والمؤسسات العامة والمصادر غير المباشرة تشمل الوثائق

والمطبوعات والنشرات الإحصائية التي تصدرها الهيئات في البلاد المختلفة وكذلك الهيئات الدولية مثل هيئة الأمم المتحدة. وكمثال على المصادر التاريخية يمكن أخذ المعلومات عن حالات الوفيات والولادة والزواج والطلاق من سجلات دائرة الأحوال المدنية دون الرجوع إلى الوحدات الأصلية.

أما مميزات هذا المصدر للمعلومات أنه يوفر الوقت والجهد والمال أما عيوبه فمن المحتمل أن تكون البيانات غير دقيقة.

3-1) طرق جمع البيانات أو أساليب جمع البيانات

لعل اهم نقطة للباحث الاحصائي هو كيفية الحصول على البيانات الاحصائية وامامه طريقان:

أ) **المسح الشامل**: وذلك بأخذ المعلومات عن جميع مفردات المجتمع قيد الدراسة لدراستها وهي افضل الطرق حيث تعطي نتائج دقيقة ومفصلة الا ان هناك صعوبات كالفحص المدمر لبعض المجتمعات او التي لايمكن حصرها كدراسة ملوحة مياه المحيطات التي تحول دون استخدام هذه الطريقة لذا نلجأ إلى طريقة أخرى وهي العينة.

ب) **العينة**: وهي طريقة تعطي معلومات ونتائج أقل دقة من الأولى حيث أن هناك بعض الأخطاء التي يمكن الوقوع بها وتؤثر على النتائج المعطاة ومنا أخطاء الصدفة أو التحيز. ألا انها اقل تكلفة وجهدا وتوفر كثيرا من الوقت

تعريف: العينة جزء من مجتمع الظاهرة قيد الدراسة تؤخذ بطريقة معينة بحيث تكون ممثلة تمثيلا صحيحا للمجتمع بقصد التعرف على خصائص هذا المجتمع.

الاعتبارات التي تدعو إلى استخدام العينات

- توفير الوقت والجهد والنفقات.

- في بعض الاحيان يكون المجتمع المدروس غير محدود ومثال على ذلك كما سبق وأن ذكرنا دراسة ملوحة مياه احدى المحيطات حيث تضطر في هذه الحالة إلى استخدام العينة.

- في بعض الأحيان يؤدي فحص المفردات إلى تدميرها. فالقيام بالمسح الشامل لدم مريض يعني سحب كل دم المريض بغرض تحليله مما يؤدي إلى قتل المريض وفي هذه الحالة لابد من أخذ عينة من دم المريض وفحصها.

1-4) العينة وطرق اختيارها

يوجد نوعان من العينات:

1) العينات العمدية أو الغرضية: ويتم سحبها بطريقة ليست عشوائية وحسب غرض الباحث وتستخدم في الحالات التي يراد منها الحصول على تقديرات تقريبية لتكوين فكرة سريعة عن مشكلة معينة او لاختبار الاستمارة الاحصائية للتأكد من صلاحيتها.

2) العينات العشوائية: يعني الاختيار العشوائي واتاحة الفرصة امام جميع مفردات المجتمع للظهور في العينة وسنقوم بشرح العينات العشوائية التالية.

أ) **العينة العشوائية البسيطة:** يتم هذا الاختيار في حالتين:

1) في المجتمعات الصغيرة: أي المجتمعات التي عدد مفرداتها (25) مفردة فأقل في هذه الحالة يتم ترقيم المفردات من 1،2........،........(25) وتكتب على بطاقات وحين يطلب عينة ذات حجم (5) مفردات تسحب بطريقة عشوائية دون ارجاع حتى لاتظهر المفردة مكررة.

2) في المجتمعات الكبيرة: أي المجتمعات التي يزيد عدد مفرداتها عن(25) مفردة فنستخدم جدول الأرقام العشوائية واليك المثال التالي موضحا بالخطوات المتبعة لاستخدام هذه الجداول.

مثال (1-1) : بجتمع حجمه 5000 مفردة يُراد سحب عينة حجمها 50 مفـردة مـن هذا المجتمع كيف يتم ذلك مستعينا بجدول الأرقام العشوائية؛

الحل: للإجابة على هذا السؤال نتبع الخطوات التالية:-

1) نرقم مفردات المجتمع من 1 الى 5000 بالشكل التـالي1...،2 ....، ....، 4999، 5000.

2) بما ان حجـم المجتمـع ذو اربـع منـازل لـذا لابـد مـن التـأكد أن جـدول الأرقـام العشوائية مكون من اربعة منازل وفي حالة توفر جـدول ذي خمـس منـازل فاننـا نحذف خانة الآحاد من هذا الجدول.

3) نبدأ بقراءة الأرقام من جدول الأرقام العشوائية مبتدئين مـن أقصـى اليمـين ومـن أعلى العمود الأول. آخذين الارقام التي تقل عن 5000 وغير المتكررة.

4) نتابع هذه العملية بشكل متسلسل وكلما انتهينا من عمود نبـدأ مـن اعلـى العمـود المجاور حتى نحصل على حجم العينة المطلـوب واذا انتهـى الجـدول ولـم نحصـل على حجم العينة المطلوبة، فاننـا نقـوم بحـذف خانـة العشـرات ونكـرر العمليـة السابقة مرة أخرى حتى نحصـل علـى الحجـم المطلـوب، واذا لـم نحصـل علـى الحجم المطلـوب نقـوم بحـذف خانـة المئـات وهكـذا حتـى نحصـل علـى الحجـم المطلوب واليك بعض هذه الارقام الواردة في العينة.73،311،487،1453،...

وفيما يلي نقدم نموذجاً لجدول الأرقام العشوائية

39432	63421	13410	21144	22341
31562	89632	43222	48715	27560
21433	67562	44444	14530	33224
22560	38432	40577	86231	37624

20430	32312	42633	47536	67311
30013	11462	47554	43231	68416
42321	12310	56773	59560	97318
62530	14562	47554	60110	73266

ب- العينة العشوائية المنتظمة:

لاختيار العينة العشوائية المنتظمة نقوم باتباع الخطوات التالية:

- نرقم مفردات المجتمع من 1- حجم المجتمع قيد الدراسة
- نختار عشوائيا مفردة البداية للعينة من الأرقام 1-9
- نحدد مقدار الزيادة المنتظمة من العلاقة.

$$\text{الزيادة المنتظمة} = \frac{\text{حجم المجتمع}}{\text{حجم العينة}}$$

- نضيف مقدار الزيادة المنتظمة على مفردة البداية لنحصل على المفردة التالية المختارة في العينة ونتابع اضافة الزيادة المنتظمة بالتتابع إلى ان نحصل على مفردات العينة المطلوبة.

مثال (1-2) : يراد اختيار عينة حجمها200 مفردة من مجتمع حجمه 4000 مفردة كيف يتم ذلك بطريقة العينة العشوائية المنتظمة؟

الحل: نتبع الخطوات التالية:

1) نختار مفردة البداية عشوائيا ولتكن المفردة رقم8 هي المفردة المختارة

2) نحدد مقدار الزيادة المنتظمة من العلاقة:

$$\text{مقدار الزيادة المنتظمة} = \frac{\text{حجم المجتمع}}{\text{حجم العينة}} = \frac{400}{200} = 20$$

3) نبدأ بكتابة أرقام العينة بحيث نضيف مقدار الزيادة على مفردة البداية وما تبعها من مفردات.

8، 28، 48، 68، 88، 108، 128، ......، 388

جـ) العينة الطبقية:- نستخدم هذا النوع عندما يكون المجتمع مقسم إلى طبقات ولاختيار عينة بهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:-

- نحدد حجم المجتمع الكبير وليكن(ن)
- نحدد حجم كل طبقة وليكن $ن_1$، $ن_2$، $ن_3$، ...$ن_ر$

بحيث ان: $ن_1 + ن_2 + ... + ن_ر = ن$

- نحدد حجم العينة الكلي وليكن م.
- نحدد حجم العينة الطبقية وليكن $م_1$، $م_2$، $م_3$، ...، $م_ر$
- نجد $م_1$، $م_2$، ...$م_ر$، من العلاقة التالية:

$$م_1 = \frac{ن_1}{ن} \times م$$

$$م_2 = \frac{ن_2}{ن} \times م$$

$$\vdots$$

$$\boxed{م_ر = \frac{ن_ر}{ن} \times م}$$

مثال (1-3) : مجتمع حجمه 10000 مفردة مكون من 4 طبقات حجم كل طبقة على التوالي، 1000، 3500، 4000، 1500 مفردة، يراد سحب عينة حجمها 400 مفردة من هذا المجتمع كيف يتم ذلك بحيث تمثل هذه العينة المجتمع تمثيلا سليما؟

الحل : من المعطيات $ن=10000$ ، $ن_1=1000$, $ن_2=3500$

$ن_3=4000$ ، $ن_4=1500$, $م = 400$

ثم نبدأ بتحديد حجم كل عينة جزئية باستخدام العلاقة اعلاها

$$م_1 = \frac{ن_1}{ن} \times م = \frac{1000}{10000} \times 400 = 40$$

$$م_2 = \frac{ن_2}{ن} \times م = \frac{3500}{10000} \times 400 = 140$$

$$م_3 = \frac{ن_3}{ن} \times م = \frac{4000}{10000} \times 400 = 160$$

$$م_4 = \frac{ن_4}{ن} \times م = \frac{1500}{10000} \times 400 = 60$$

$$م = 40 + 140 + 160 + 60 = 400$$

د) العينة متعددة المراحل: عندما يتعذر استخدام الطرق السالفة الذكر لاختيار عينة من مجتمع ما فاننا نلجأ لأسلوب العينة متعددة المراحل وسنقوم بتوضيح هذه الطريقة من خلال المثال التالي:-

مثال (1–4): يراد قياس المستوى التحصيلي في كلية بجتمع بطريقة العينة متعددة المراحل كيف يتم ذلك؟

الحل: من المعلوم ان الكلية تشمل على عدة تخصصات، نقوم باختيار تخصص ما عشوائياً كمرحلة اولى.

- كل تخصص به عدة شعب، نقوم باختيار احدى هذه الشعب عشوائيا. وهذه هي المرحلة الثانية.
- نختار عينة حسب الحجم المطلوب عشوائيا من هذه الشعبة وهي المرحلة الثالثة.

1-4 : تفريغ البيانات الاحصائية

بعد الانتهاء من جمع البيانات سواء كانت البيانات ميدانية ام تاريخية يقوم الباحث بالعملية التالية وهي: عملية تفريغ البيانات، فاذا كان حجم البيانات صغيرا يتم تفريغها يدويا على جداول معدة لهذا الغرض اما اذا كان حجم البيانات كبيرا فيمكن الاستعانة بالآلات التي تعتمد على نظام البطاقات المثقبة سابقا والاقراص الممغنطة والاشرطة حاليا وهذا لايتم الا عن طريق الترميز للبيانات الوصفية حتى لا تأخذ حيزا كبيرا سواء على البطاقات المثقبة او الاقراص حتى تحفظ في الاجهزة الالكترونية والحاسبات الالكترونية لحين الطلب.

1-4-1 : التوزيعات التكرارية

تعريف: التوزيع التكراري هو عبارة عن توزيع البيانات المأخوذة عن ظاهرة معينة على الفئات بحيث تقع كل مفردة في فئة واحدة فقط والمفردات التي تقع في فئة واحدة تكون متجانسة. ثم نقوم بعد المفردات التي تقع في الفئة ونضعها في جدول يسمى بالجدول التكراري.

اما اذا كان مدى البيانات صغيرا فانه يمكننا بناء الجدول التكراري بترتيب البيانات ترتيبا تصاعديا حتى نصل إلى أعلى قيمة وهذا يمثل العمود الأول، أما العمود

الثاني فيمثل عدد المرات التي تكررت بها كل مفردة.

مثال (1-5): البيانات التالية تمثل الأجور اليومية لخمسة عشر عاملا بالدينار الأردني مصنفة بالجدول (1-5) .

الأجور اليومية	عدد العمال
3	2
3.5	2
4	2
5	3
5.5	1
6	3
المجموع	15

جدول(1-5)

وهذا مثال على تبويب البيانات في جدول.

وأما اذا كان المدى كبيرا وحجم البيانات ايضا كبيرا فلا بد من تقسيم قيم البيانات الى فئات ذات اطوال متساوية او غير متساوية وتفرغ البيانات على هذه الفئات وهذا مايسمى بالتوزيع التكراري الفئوي ونقوم باتباع الخطوات التالية في انشائه:

1) نحدد اعلى قيمة للمشاهدات وادنى قيمة للمشاهدات.

2) نجد مدى هذه البيانات من العلاقة.

المدى المطلق = اعلى قيمة مشاهدة-ادنى قيمة+1 (للدقة)

3) نحدد عدد الفئات وهذا يكون عادة حسب رغبة الباحث ولكن بشكل عام فان العدد يتراوح 5 ≤ عدد الفئات ≤ 10 . الا ان بعض الباحثين يرى ان تكون بين 5 ≤ عدد الفئات ≤ 15 الا ان هذا فيه جهد كبير للباحث.

4) يحدد طول الفئة وذلك من العلاقة:

$$\text{طول الفئة} = \frac{\text{المدى المطلق}}{\text{عدد الفئات}}$$

ويستحسن ان يكون طول الفئة خال من الكسور لتسهيل العمليات الحسابية. وعند ظهور مثل هذه الكسور فلا بد من التخلص منها عن طريق تقريبها الى اعلى وهذا بدوره يؤدي الى نقص في عدد الفئات او مطابقة للفئات المفترضة.

5) نعين الحد الادنى للفئة الاولى وهو اصغر قيمة مشاهدة.

6) نحدد الحد الادنى الفعلي للفئة الاولى من العلاقة.

الحد الادنى الفعلي للفئة الاولى= الحد الادنى للفئة الاولى- $\frac{1}{2}$ وحدة دقة

7) نعين الحد الاعلى الفعلي للفئة الاولى من العلاقة.

الحد الاعلى الفعلي للفئة الأولى = الحد الادنى الفعلي للفئة الاولى+طول الفئة

او نحدد الحد الاعلى للفئة الاولى من العلاقة.

الحد الاعلى الفعلي للفئة الاولى=الحد الاعلى للفئة الاولى+ $\frac{1}{2}$وحدة دقة

8) نجد الحدود الفعلية الدنيا والعليا وكذلك الحدود الدنيا والحدود العليا لباقي الفئات من العلاقات التالية:-

الحد الادنى للفئة اللاحقة= الحد الادنى للفئة السابقة+ طول الفئة

الحد الادنى الفعلي للفئة اللاحقة= الحد الادنى الفعلي للفئة السابقة+ طول الفئة

الحد الاعلى الفعلي للفئة اللاحقة =الحد الاعلى الفعلي للفئة السابقة+ طول الفئة

9) نحدد مراكز الفئات وذلك من خلال ايجاد مركز الفئة الاولى من العلاقة:

$$\text{مركز الفئة الاولى} = \frac{\text{الحد الأدنى للفئة الاولى + الحد الأعلى للفئة الاولى}}{2}$$

$$= \frac{\text{الحد الأدنى الفعلي للفئة الاولى + الحد الأعلى الفعلي للفئة الاولى}}{2}$$

10) نجد مراكز الفئات اللاحقة من العلاقة:

مركز الفئة اللاحقة=مركز الفئة السابقة+طول الفئة

11) نفرغ البيانات على الفئات باستخدام الخطوط الرأسية لكل تكرار وخط افقي للتكرار الخامس ونستمر في التفريغ حتى نهاية آخر مشاهدة.

12) نسجل مجموع التكرارات عدديا امام كل فئة لتمثل بعمود التكرارات.

13) نجمع التكرارت لنقارنها بمجموع المشاهدات حيث يجب التطابق.

مثال (1-6) : البيانات التالية تمثل الاجر الاسبوعي لخمسين موظف في احدى الشركات الصناعية.

57، 43، 46، 24، 44، 38، 19، 54، 49، 57، 29، 53، 45، 47، 41، 37، 49، 56، 47، 29، 31، 32، 51، 52، 42، 45، 28، 43، 49، 34، 24، 42، 28، 39، 21، 18، 37، 34، 29، 23، 35، 43، 39، 41، 26، 27، 32، 37، 28.

المطلوب: انشاء جدول تكراري يمثل جميع ما ورد سابقا.

الحل: نبدأ باتباع الخطوات السابقة.

- نجد المدى المطلق= اكبر قيمة- اصغر قيمة+ 1=57-18+1=40

- ليكن عدد الفئات 6.

- نجد طول الفئة من العلاقة.

$$\text{طول الفئة} = \frac{\text{المدى المطلق}}{\text{عدد الفئات}} = \frac{40}{6} = 6.66 \approx 7$$

- نعين الحد الادنى للفئة الاولى وليكن اصغر قيمة وهو18.

- نعين الحد الادنى الفعلي للفئة الاولى 18-0.5=17.5.

- نعين الحد الاعلى الفعلي للفئة الاولى= 17.5+ طول الفئة= 17.5+7=24.5

- نعين الحد الاعلى للفئة الاولى= 24.5-0.5=24.

بهذا نكون قد حصلنا على الحدود العليا والدنيا وهي [18، 24] والحدود الفعلية الدنيا والعليا للفئة الأولى وهي [5 ، 17، 5 ، 24]. وباضافة العدد 7 وهو طول الفئة لكل من الحدود الدنيا والعليا السابقة نحصل على الحدود الدنيا والعليا للفئات اللاحقة.

- نعين مركز الفئة الاولى= $\frac{24+18}{2} = 21$ نضيف طول الفئة الى مركز الفئة السابقة لنحصل على مراكز الفئات اللاحقة.

- نفرغ البيانات المعطاة على الفئات التي انشأناها سابقا وذلك بوضع خطوط رأسية وخط مائل للقراءة الخامسة.

- نجمع التكرارات المناسبة في عمود الخطوط ونضع المجموع في عمود التكرارات.

- نتأكد من مطابقة عدد المشاهدات مع مجموع التكرارات.

نلخص كل الخطوات السالفة الذكر في الجدول التالي:

حدود الفئة (1)	الحدود الفعلية للفئة (2)	مركز الفئة (3)	الاشارات (4)	التكرار
24−18	24.5−17.5	21	/ 𝍸	6
31−25	31.5−24.5	28	//// 𝍸	9
38−32	38.5−31.5	35	𝍸 𝍸	10
45−39	45.5 − 38.5	42	// 𝍸 𝍸	12
52−46	52.5−45.5	49	/// 𝍸	8
59−53	59.5−52.5	56	𝍸	5

وطالما اننا بصدد التكرارات فـلا بـد مـن التنويـه الى التكـرار النسبي والتكـرار المئوي وعليه فيكون التكرار النسبي لكل فئة هو.

$$\text{التكرار النسبي} = \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{التكرار الكلي}}$$

$$\text{التكرار المئوي للفئة} = \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{التكرار الكلي}} \times 100\%$$

ولتوضيح هذا المفهوم نورد المثال التالي:

مثال(1−7):البيانات التالية تمثل فئات الاجور الاسبوعية لمائة عامل مبينة بالجدول(1−7)

فئات الاجور	30−34	35−39	40−44	45−49	50−54	المجموع
التكرار	5	10	20	25	40	100

جدول (1 −7)

المطلوب: تكوين جدول التكرار النسبي والتكرار المئوي لهذه البيانات .

الحل: الجدول المطلوب هو جدول (1−8)

الفئات	التكرار $ك_ر$	التكرار النسبي	التكرار المئوي
34-30	5	$\frac{5}{100}$	%5
39-35	10	$\frac{10}{100}$	%10
44-40	20	$\frac{20}{100}$	%20
49-45	25	$\frac{25}{100}$	%25
54-50	40	$\frac{40}{100}$	%40
المجموع	100	$1 = \frac{20}{20}$	%100

جدول(1-8)

نلاحظ أن $\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر = 100$

1-4-2 التوزيع التكراري المتجمع

في بعض الاحيان نحتاج الى معرفة عدد المفردات التي تساوي او تزيد عن قيمة معينة أو تساوي او تقل عن قيمة معينة وحتى نستطيع الحصول على هذه المعلومات لابد من تكوين جدول تكراري متجمع وهو يبين التكرارت المتجمعة لاكثر من فئة وهو نوعان:

أ) الجدول التكراري المتجمع الصاعد ب) الجدول التكراري المتجمع الهابط

أ) الجدول التكراري المتجمع الصاعد

خطوات انشاء الجدول

- نضيف فئة سابقة وتكرارها صفر
- نحول حدود الفئات الى حدود فعلية اذا كانت الفئات منفصلة.
- نحدث عمودا جديدا يحوي نهاية الفئات.

- نقوم بتجميع التكرارات من اعلى الى اسفل.

مثال(1-8):الجدول التالي يمثل الأجور لخمسة عشر عاملاً كما هو مبين في جدول(1-9)

فئات الأجور	5- 3	8-6	11-9	14-12	17-15
عدد العمال	0	2	3	4	6

جدول (1-9)

المطلوب: تكوين جدول متجمع صاعد لهذه البيانات.

الحل: نكون جدول الحل (1-10)

فئات الاجور	عدد العمال	الحدود الفعلية	نهاية الفئات	التكرار المتجمع الصاعد
5-3	صفر	5.5-2.5	اقل من 5.5	صفر
8-6	2	8.5-5.5	اقل من 8.5	2
11-9	3	11.5-8.5	اقل من 11.5	5
14-12	4	14.5-11.5	اقل من 14.5	9
17-15	6	17.5-14.5	اقل من 17.5	15
المجموع	15			

جدول (1-10)

نلاحظ على الجدول ما يلي:

1) التكرار الصاعد المناظر للفئة الأولى يساوي تكرار الفئة الأولى.

2) التكرار المتجمع الصاعد المناظر للفئة الأخيرة يساوي مجموع التكرارات كلها.

ب) الجدول التكراري المتجمع الهابط

خطوات انشاء الجدول:

1) نضيف فئة لاحقة وتكرارها صفر.

2) نحول حدود الفئات الى حدود فعلية اذا كانت الفئات منفصلة.

3) نحدث عمودا جديدا يحوي على بداية الفئات.

4) نقوم بتجميع التكرارات من أسفل الى اعلى

والان نطبق هذه الخطوات على المثال السابق ليظهر في جدول (1-11).

فئات الاجور	عدد العمال	الحدود الفعلية	بداية الفئات	التكرار المتجمع الهابط
8-6	2	8.5-5.5	اكثر من 5.5	15
11-9	3	11.5-8.5	اكثر من 8.5	13
14-12	4	14.5-11.5	اكثر من 11.5	10
17-15	6	17.5-14.5	اكثر من 14.5	6
20-18	صفر	19.5-17.5	اكثر من 17.5	صفر

جدول (1 - 11)

ونلاحظ علىالجدول ما يلي:-

1- ان التكرار المتجمع الهابط للفئة الأولى يساوي مجموع التكرارات.

2- ان التكرار المتجمع الهابط المناظر للفئة الأخيرة يساوي تكرار الفئة الأخيرة كما ونستطيع ان نعرف من الجدول ان عدد الذين تزيد اجورهم مثلا عن 8ر5 دينار هو 13 موظفا وعدد الذين تزيد أجورهم عن 11.5 دينار هو 10 موظفين

أما بالنسبة لجدول التكرار المتجمع الصاعد فاننا نستطيع ايجاد عدد الذيـن تقـل أجورهم مثلا عن 8.5 دينار وهما موظفان او من تقل رواتبهم عن 14.5 دينار (وهـم تسعة موظفين).

وفي نهاية التوزيعات التكرارية لابد من القاء الضوء على بعـض النقـاط الهامـة التي فاتنا ذكرها.

1-4-3: الجداول المقفلة والمفتوحة:

تعريف: الجدول المقفل هو الجـدول الـذي تكـون فيـه الفئـة الاولى والفئـة الاخـيرة محددة. اما الجدول المفتوح من طرفه الادنى فهو الجدول الـذي تكـون فيـه بداية الفئة الاولى غير محددة. اما الجـدول المفتـوح مـن طرفـه الاعلـى فهـو الجدول الذي تكون نهاية الفئة الاخيرة غير محدودة. امـا اذا كـانت بدايـة الفئة الاولى غير محددة ونهايـة الفئـة الأخـيرة غـير محـددة فيكـون الجـدول مفتوحا من كلا طرفيه ويمكن التوضيح بالمثال التالي:-

جدول رقم (1-12)	جدول رقم (1-13)	جدول رقم (1-14)	جدول رقم (1-15)
اقل من 3		اقل من 3	
6-3	6-3	6-3	6-3
10-7	10-7	10-7	10-7
14-11	14-11	14-11	14-11
	اكبر من 14	اكبر من 14	
مفتوح من طرفه الادنى	مفتوح من طرفه الاعلى	مفتوح من كلا طرفيه	جدول مقفل

وكلما كان الجدول مقفلا كلما كانت العمليات الحسابية اسهل.

1-4-4: الجداول المنتظمة وغير المنتظمة:

تعريف: الجدول المنتظم هو الجدول الذي تكون فيه اطوال الفئات متساوية.

تعريف: الجدول غير المنتظم هو الجدول الذي تكون فيه اطوال الفئات غير متساوية.

- في حالة انشاء جدول تكراري فان الباحث يقوم بافتراض عدد الفئات لانه لايوجد قاعدة عامة يعتمد عليها في تحديد عددها الا انه يجب مراعاة الاعتبارات التالية عند تحديد عدد الفئات:

1) حجم البيانات وتباينها وتجانسها

2) النتيجة التي يريد الباحث الوصول إليها أن تكون دقيقة او تقريبية.

تعريف: الفئة عبارة عن مجموعة جزئية محددة بحدين الاصغر. ويسمى الحد الادنى والاكبر ويسمى الحد الاعلى والمفردات الموجودة في الفئة متقاربة ويفضل ان تكون اطوال الفئات متساوية لكي تسهل العمليات الحسابية.

- **تعين حدود الفئات:** عند تعيين حدود الفئات التي يجب أن تأخذ بعين الاعتبار عدم تداخل هذه الحدود وهذا يعتمد على معرفتنا لنوعين من البيانات هما:-

1) البيانات المأخوذة عن ظاهرة منفصلة وتأخذ قيما صحيحة مثل اعداد السيارات، البيوت، الطلاب، الطائرات...الخ.

فلو كانت البيانات المتوفرة لدينا عن اعداد الطائرات الهابطة في مطار عمان الدولي ولمدة مئة يوم ولو فرضنا ان اقل يوم هبطت في المطار بـ 20 طائرة واكثر يوم هبطت فيه 43 طائرة. نلاحظ بأن هذه الظاهرة هي ظاهرة منفصلة (وثّابة) والبيانات المأخوذة عنها اعداد صحيحة ولو فرضنا ان طول الفئة يساوي(5) وحدات فان افضل شكل لكتابة هذه الفئات هي الفئات التي يوجد بها ثغرة مقدارها واحد صحيح بين الحد الأعلى للفئة والحد الادنى للفئة التي تليها وتكون بالصورة التالية:-

20-24، 25-29، 30-34، 35-39، 40-44 ونلاحظ انه يوجد ثغرة مقدارها واحد صحيح بين24، 29.25، 34.30، 35، ...الخ وهذه الفئات غير متداخلة.

ونتعامل مع هذه الفئات بالحدود الفعلية لها فان الحدود الفعلية للفئة الاولى 19.5 – 24.5 ....الخ ويمكن استخراج طول الفئة لهذا النوع من الفئات عن طريق العلاقة التالية:

طول الفئة=الحد الاعلى الفعلي – الحد الادنى الفعلي

2) البيانات المأخوذة عن ظاهرة متصلة(مستمرة) وتأخذ قيما كسرية مثل البيانات عن الاطوال، الاوزان، الاحجام، المسافات....الخ. فلو فرضنا ان لدينا بيانات عن اوزان50رجلا(ظاهرة متصلة) وكان اقل مشاهدة هي 55 كغم واكبر مشاهدة 70 كغم ان البيانات في هذه الحالة تأخذ قيما كسرية وافضل طريقة لكتابة الفئات هي ان تبدأ الفئة بنفس القيمة التي تنتهي فيها الفئة السابقة ولوكان طول الفئة4 وحدات فان الفئات تكتب بالصورة التالية:

الفئات
55 وأقل من 59
59 وأقل من 63
63 واقل من 67
67 واقل من 71

ان هذه الفئات غير متداخلة ولا يوجد بينها ثغرات فالفئة الاولى تعني ان جميع الذين تقع اوزانهم بين 55 كغم واقل من59 كغم تقع ضمن الفئة الاولى اما الرقم(59) فيقع في الفئة الثانية وهكذا.

الفئات غير المتساوية: في حالة بروز فئات غير متساوية في بعض الجداول التكرارية فاننا نلجأ لحساب التكرار المعدل والذي يمكن الحصول عليه من العلاقة التالية :

$$\text{تكرار الفئة المعدل} = \frac{\text{تكرار الفئة الأصلية}}{\text{طول الفئة}}$$

وبعد ذلك نقوم بالحسابات المطلوبة كالمعتاد ولتوضيح هذا المفهوم نقوم بإعطاء المثال التالي.

مثال (1–9) : الجدول (1–16) يمثل توزيع القوى العاملــة في الأردن حســب الســن (بالالف)لسنة 1970 والمطلوب عمل تكرار معدل لعمود التكرارات.

العمر	10–	15–	20–	25–	30–	40–	50–	60–	65 فما فوق
عدد العمال	10	70	106	89	133	79	45	14	15

جدول(1–16)

الحل : نلاحظ من الجدول أعلاه أن الفئات غير متســاوية لـذا نقـوم بعمـل جـدول التكرار المعدل والمبين في جدول (1 – 17):

فئات العمر	**عدد العمال**	**التكرار المعدل**
10–	10	$2=\frac{10}{5}$
15–	70	$14=\frac{70}{5}$
20–	106	$21.6=\frac{106}{5}$
25–	89	$17.8=\frac{89}{5}$
30–	133	$13.3=\frac{133}{10}$
40–	79	$13.3=\frac{133}{10}$
50–	45	$7.9=\frac{79}{10}$
50–	45	$4.5=\frac{45}{10}$
60–	14	$2.8=\frac{14}{5}$
65 فما فوق	15	$3=\frac{15}{5}$

جدول(1–17)

مثال (1–10) :البيانات التالية تمثل أطوال وأوزان 30 طالباً مبينة بالجدول (1–18)

الطول	الوزن	الطول	الوزن	الطول	الوزن	الطول	الوزن	الطول	الوزن	الطول	الوزن
160	53	171	68	169	68	170	68	150	51	160	55
165	54	178	74	167	70	179	75	175	53	171	65
162	60	177	69	171	65	184	80	168	62	175	69
167	58	179	77	155	50	172	61	159	75	181	54

جدول(1–18)

المطلوب:

1) تكوين جدول تكراري مزدوج لهذه البيانات

2) عدد الطلاب الذين اوزانهم تتراوح بين 55 وتقل عن 70

3) عدد الطلاب الذين اوزانهم 60 فما فوق واطوالهم 160 سم فما فوق

4) عدد الطلاب الذين اطوالهم 165 فما فوق

5) أوجد التوزيع الهامشي لقيم س والتوزيع الهامشي لقيم ص.

الحل: 1) نبدأ أولا بتكوين الجدول التكراري المزدوج في جدول(1–19)

فئات الأوزان ص / س فئات الأطوال	50-	55-	60-	65-	70-	75-	80-85	المجموع
155-	//					/		3
160-	/	/	//					4
165-	/	/	///	/	/			7
170-			/	////	/	/		7
175-	/			//	/	//		6
180-185	/						//	3
المجموع	6	2	6	7	3	4	2	30

جدول(1–19)

2) عدد الطلاب= 2+6+7=15

3) عدد الطلاب=21

4)عدد الطلاب= 7+7+6+3=23

5) التوزيع الهامشي لقيم س كما في جدول(1-20)

الأطوال	التكرار
-155	3
-160	4
-165	7
-170	7
- 175	6
185 - 180	3
	30

جدول (1 -20)

والتوزيع الهامشي لقيم ص كما في الجدول (1 - 21)

الاوزان	التكرار
-50	6
-55	2
-60	6
-65	7
-70	3
-75	4
85-80	2
	30

جدول(1-21)

مثال (1–11) :أكتب التكرار المعدل للبيانات في الجدول التالي :

الفئات	150–	155–	165–	185–195
التكرار	15	50	50	30

الحل : نكون جدول الحل (1–22).

الفئات	التكرار	التكرار المعدل
150–	15	$\frac{15}{5} = 3$
155–	50	$\frac{50}{10} = 5$
165–	50	$\frac{50}{20} = 2.5$
185–195	30	$\frac{30}{10} = 3$

جدول(1–22)

مع ملاحظة أنه لايجاد التكرار المعدل نجده من العلاقة التالية:

$$\text{التكرار المعدل للفئة} = \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول الفئة}}$$

ملاحظة : التكرار المعدل لا يوجد الا للحالات التي تكون فيها الفئات غير منتظمة ونادراً ما يستعمل عندما تكون الفئات متساوية

مثال: البيانات التالية تمثل فئات الأجور لخمسين عاملاً مبينة بالجدول (1–23):

فئات الأجور	التكرار
40–	8
60–	12
80–	20
100–	6
120–140	4
المجموع	50

جدول (1–23)

المطلوب: 1) ايجاد عدد العمال الذين تقل اجورهم عن 80 دينار.

2) عدد العمال الذين تقل اجورهم عن 55 دينار.

3) نسبة العمال الذين يتقاضون أجراً يزيد عن90 دينار.

4) نسبة العمال الذين يتقاضون اجرا بين 55-90.

5) عدد العمال الذين تقل اجورهم عن 90 دينار.

6) ايجاد قيمة الاجر الذي يستحق صاحبه الدعم والاجر الاعلى الذي يستحق صاحبه المكافأة اذا اتفق على ان تكون النسبة الاولى 8٪ من العمال والنسبة التالية12٪ من العمال.

الحل: 1) عدد العمال الذين تقل اجورهم عن 80=8+12=20 عاملا.

2) طول الفترة=60-40=20، 55-40=15 الفرق في الراتب

والآن نقوم بعمل نسبة وتناسب

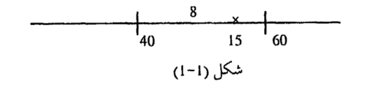
8 ← 20

س ← 15 $\Leftarrow$

$$\frac{8}{س} = \frac{20}{15}$$

وبالضرب التبادلي فإن: 20س = 120 ∴ س = $\frac{120}{20}$ = 6

∴ عدد العمال = 6 عمال الذين تقل أجورهم عن 55 دينار.



شكل (1-1)

3) 100-80=20 طول الفئة

90-80=10

$20 \leftarrow 20$

$10 \leftarrow$ س $\Leftarrow$ $\frac{20}{10} = \frac{20}{س}$ $\Leftarrow$ 20 س = 20

$\therefore$ س = $\frac{200}{20}$ = 10

التكرار	4	6	10	
الفئة	140	120	100	90

شكل (1-2)

مجموع العمال الذي تزيد رواتبهم عن 90 دينار= 10+6+4=20 عامل

نسبة العمال الذي تزيد رواتبهم عن 90 = $\frac{20}{50}$ × 100٪ = 40٪

4) عدد العمال الذين تقع رواتبهم بين55،90=2+12+10=24 عامل

10	10	12	2	6 عمال
100	90	80	60	55	40

شكل (1-3)

نسبة العمال الذين رواتبهم بين(55-90)

= $\frac{24}{50}$ × 100٪ = 48٪

5) عدد العمال الذين تقل اجورهم عن 90 دينار=10+12+8=30 عاملا

10	10	12	8
100	90	80	60	40

شكل (1-4)

النسبة = $\frac{30}{50} \times 100\% = 60\%$

6) النسبة الأولى= $\frac{80}{100} \times 50 = 4$ عمال

20 ← 8

س ← 4 ⇐ $\frac{20}{س} = \frac{8}{4}$ ⇐ 8 س = 80

∴ س = 10

الاجر الذي يستحق الدعم= 40 + 10 = 50

عدد الاشخاص الذين يستحقون المكافأة = $50 \times \frac{12}{100} = 6$.

1-5) عرض البيانات:

بعد جمع وتبويب البيانات يأتي عرض البيانات وهذا يساعد الناظر على أخذ فكرة سريعة عن الظاهرة قيد الدراسة دون تعب واجهاد ويوجد عدة طرق للعرض نذكر اهمها.

1 - 5 - 1) العرض الجدولي:

يكتسب العرض الجدولي اهمية كبرى بعد أن يقوم الباحث بتفريغ البيانات الاحصائية ضمن جداول لها ميزات رئيسية منها:

- ان يكون للجدول عنواناً كاملاً مختصراً معبراً عما يحويه الجدول من بيانات.
- أن يضع عناوين بارزة لكل من الصفوف والأعمدة.
- أن يعطي لكل جدول رقم معين.

- أن تحدد الوحدات المستخدمة في الجدول حسب البيانات الموجودة.
- أن ترتب البيانات في الجدول حسب الأهمية والتسلسل الزمني.
- ذكر المصادر المستقى منها البيانات.
- أن توضع الملاحظات الخاصة عن الجدول.

أما هذه الفئات ومن اجل الاختصار فيمكن كتابتها بتحديد بداية الفئات وتترك نهايتها لتتحدد ضمنا من الفئة التالية لها وفي هذه الحالة تحدد نهاية الفئة الاخيرة كما في الجدول التالي:

الفئات المفتوحة:

55-

59-

63-

71-67

وللعلم ان هذا النموذج من الفئات يمكن استخدامه لبيانات كل من الظاهرتين المنفصلة والمتصلة.

ويمكن ايجاد طول الفئة من العلاقة التالية

طول الفئة = الحد الأدني للفئة اللاحقة-الحد الأدنى للفئة السابقة.

= 59 -55=4

الجدول التكراري المزدوج:

مثال(1-12): الجدول (1-24) يمثل اعداد الطلبة في كلية الهندسة تخصصاتهم وسنواتهم الدراسية.

السنة / التخصص	هندسة مدنية	هندسة معمارية	هندسة كيماوية	المجموع
الأولى	40	30	20	90
الثانية	50	40	15	105
الثالثة	60	20	25	105
الرابعة	50	60	60	170
المجموع	200	150	120	470

جدول (1 – 24)

*يتم قبول الطلبة في السنة الاولى بعد امتحان القبول

المصدر: وزارة التعليم العالي

1 – 5 – 2) العرض الهندسي للبيانات المنفصلة :

أ) الاعمدة او المستطيلات

ب) العرض استخدام الصور

جـ) العرض استخدام الدوائر

د) الخط البياني

أ- العرض باستخدام المستطيلات(او الاعمدة)

كثيرا ما نرى من خلال زياراتنا الى المؤسسات المختلفة هذا النوع من التمثيل مما يدل على انتشار هذه الطريقة بشكل واسع ولاستخدام هذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

- نرسم احداثين يلتقيان في نقطة الاصل. يمثل المحور الاول القيمة الوصفية والمحور الثاني القيمة العددية للقيمة المقابلة للقيمة الوصفية.
- اختيار مقياس رسم مناسب يتناسب مع حجم الورقة وحجم القيم العددية.
- رسم مستطيلات ذات قواعد متساوية وتتناسب اطوالها مع الاعداد التي يمثلها. وكذلك تكون متباعدة بعدا مناسبا.
- عند مقارنة ظاهرتين او اكثر تكون المستطيلات المقارنة متلاصقة.

مثال (1–13): البيانات التالية تمثل اعداد الطلبة في السنة الاولى والثانية والثالثة لطلبة كلية الاداب في جامعة ما حسب تخصصاتهم.

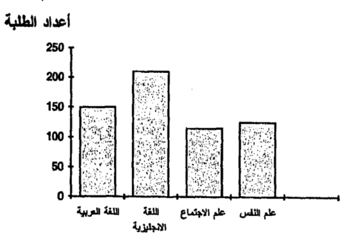
التخصص / السنة	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	علم الاجتماع	علم النفس	المجموع
الاولى	200	150	120	100	570
الثانية	150	210	115	125	600
الثالثة	80	120	80	70	350
المجموع	430	480	315	295	1520

جدول(1–25)

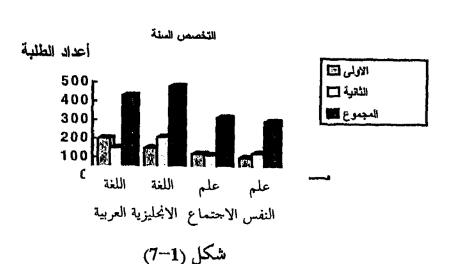
والمطلوب تمثيل هذه البيانات

1) بالمستطيلات لطلاب السنة الثانية حسب تخصصاتهم.

2) قارن بالاعمدة بين طلاب السنة الاولى والثانية حسب تخصصاتهم.



شكل (1–6)



شكل (1-7)

ب- العرض بطريقة الصور

في هذه الطريقــة تكــون الصــورة المعــبرة عــن البيانــات المــراد عرضهــا كوســيلة ايضاحيــة تجــذب انتبــاه المشــاهد. مثــال علــى ذلــك: عنــد التعبــير عــن انتــاج شــركة مرسيدس للسيارات في سنوات مختلفة فكل صــورة لســيارة تمثـل 1000 ســيارة فتضــع عدد من الصور بقدر انتاج الشركة لتلك السنة، وبدلا مــن صــورة ســيارة المرســيدس سنضع العلامة التجارية لها.

مثال(1-14): البيانات التالية هي بيانات افتراضية تمثل انتاج احد مصانع شركة المرســيدس في منطقة بافاريا خلال السنوات 1981/1983 والمطلوب تمثيل هذه البيانات بالصور.

السنة	كمية الانتاج	الصور (صورة واحدة لكل ألف سيارة)
1981	3000	
1982	4000	
1983	6000	

شكل (1-8)

جـ) العرض بطريقة الدوائر:

تعتبر هذه الطريقــة مـن افضـل الطـرق لتمثيـل البيانـات ذات الصفـة المشـتركة وتستطيع بواسـطتها ان تقـارن الاجـزاء بعضهـا البعـض ثـم الجـزء(القطـاع الدائـري) بالكل(الدائرة) ونتبع الخطوات التالية:-

1) نستخرج زاوية قطاع الدائرة من العلاقة التالية:-

$$\text{زاوية القطاع} = \frac{\text{قيمة الجزء المحدد}}{\text{المجموع الكلي للأجزاء}} \times 360^{\circ}$$

حيث ان 360 هي الزاوية المركزية للدائرة.

2) نقوم برسم دائرة معينة ونرسم عليها نصف قطر.

3) نرسم الزاوية المركزية التي ضلعها الابتدائي نصف القطر والممثلة بالقطاع.

مثال (1-15): بستان به 1080 شجرة مثمرة موزعة كما في الجدول التالي:-

نوع الشجر	العدد
تفاح	180
اجاص	540
عنب	90
دوراق	270
المجموع	1080

جدول (1 – 26)

والمطلوب تمثيل هذه البيانات بالقطاع الدائري

الحل: نجد زوايا القطاع لجميع اصناف الاشجار المثمرة

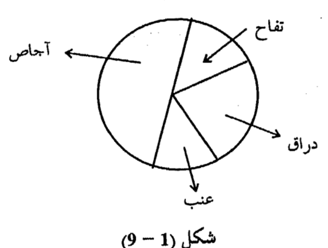
زاوية القطاع(للتفاح) $= \frac{180}{1080} \times 360^\circ = 60^\circ$

زاوية القطاع(للاجاص) $= \frac{540}{1080} \times 360^\circ = 180^\circ$

زاوية القطاع(عنب) $= \frac{90}{1080} \times 360^\circ = 30^\circ$

زاوية القطاع(دراق) $= \frac{270}{1080} \times 360^\circ = 90^\circ$

ومجموع هذه الزوايا يجب ان يساوي 360°



شكل (1 – 9)

د) التمثيل بالخط البياني:

وهو يوضح العلاقة بين ظاهرتين او اكثر بحيث تمثل على المحور الافقي المسميات او الزمن وعلى المحور الرأسي قيم الظاهرة مع اختيار مقياس رسم مناسب.

مثال (1–16): البيانات التالية تبين اعداد المواليد والوفيات في احدى البلدان خلال السنوات 1980/ 1984. مثل هذه البيانات بالخط البياني:

المواليد والوفيات بالآلاف

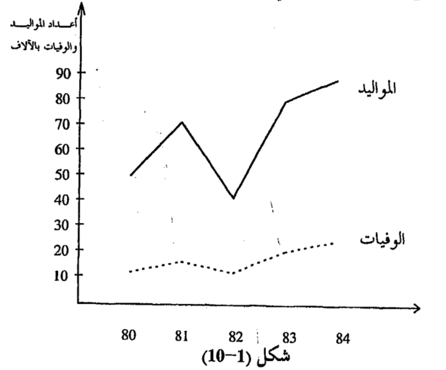
السنة	المواليد	الوفيات
1980	50	10
1981	70	12
1982	40	8
1983	80	14
1984	85	16

جدول(1–27)

الحل: 1) نرصد السنوات التي على المحور الافقي وقيم الظاهرة على المحور الرأسي.

2) نرصد النقاط على الرسم البياني والتي مساقطها الافقية السنوات والعمودية قيم الظاهرة.

3) نصل بين النقطة والنقطة التي تليها بخط مستقيم او خطوط متقطعة.



شكل (1–10)

1 - 6 : تمثيل الجداول التكرارية :

ويتم ذلك بأحد الأشكال التالية:-

أ- المدرج التكراري:

تعريف: المدرج التكراري عبارة عن مستطيلات متلاصقة مقامه على محور الفئات، قواعدها اطوال الفئات وارتفاعاتها تكرار كل فئة وللحصول على هذا المدرج نتبع الخطوات التالية:-

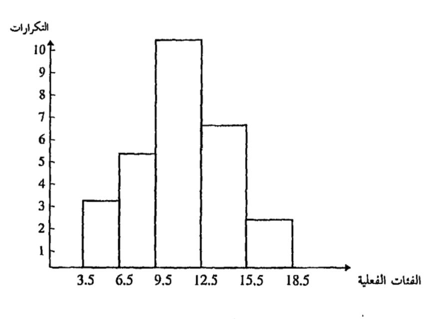
- نرسم محورين متعامدين احدهما يمثل الفئات الفعلية في حالة الفئات المنفصلة والآخر يمثل التكرارات
- نرصد بداية الفئات الفعلية وعندما نصل الى نهاية اخر فئة نرصد حدها الاعلى.
- نقيم مستطيلات متلاصقة قواعدها الفئات الفعليـة وارتفاعاتها التكـرارات المقابلة لكل فئة.

مثال (1-17): مثل الجدول التكراري (1-28) بالمدرج التكراري

الفئات	التكرارات	الحدود الفعلية
6-4	3	6.5 - 3.5
9-7	5	9.5-6.5
12-10	10	12.5-9.5
15-13	6	15.5-12.5
18-16	2	18.5-15.5

جدول(1-28)

الحل: بالاستفادة من البيانات السابقة نرسم المدرج ادناه.



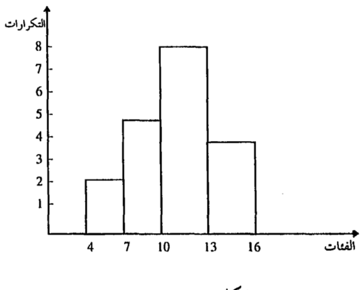
شكل (1- 11)

مثال (1-18): مثل الجدول التكراري (1-29) بالمدرج التكراري.

التكرارات	الفئات
2	4 واقل من 7
5	7 واقل من 10
8	10واقل من 13
4	13 واقل من 16

جدول (1-29)

الحل: في هذا الجدول نستخدم الفئات المتصلة:



شكل (1− 12)

ب) المضلع التكراري:

يمكن رسم المضلع التكراري للجداول التكرارية بطريقتين.

1) باستخدام المدرج التكراري.

2) باستخدام مراكز الفئات.

1) باستخدام المدرج التكراري

في هذه الحالة نتبع الخطوات التالية :-

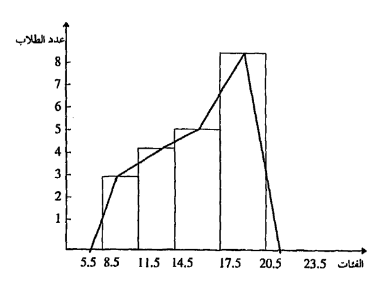
- اضافة فئة سابقة وفئة لاحقة وتكرار كل منهما صفر الى الجدول التكـراري وذلـك لاغلاق المضلع من كلا طرفيه على المحور الأفقي.
- رسم المدرج التكراري حسب الخطوات السابقة.
- ننصف قواعد المستطيلات العليا.
- نصل بين كل نقطة والنقطة الـتي تليهـا بخـط مسـتقيم فيكـون الشـكل النـاتج هـو المضلع التكراري.

مثال (1–19) : البيانات التالية تمثل علامات 30 طالب من 20 موزعة كما في الجدول التكراري (1–30) والمطلوب رسم المضلع التكراري باستخدام المدرج التكراري.

فئات العلامات	عدد الطلاب	الفئات الفعلية
8–6	صفر	8.5 – 5.5
11–9	3	11.5–8.5
14–12	4	14.5–11.5
17–15	5	17.5–14.5
20–18	8	20.5–17.5
23–21	صفر	23.5–20.5

جدول (1–30)

الحل: من البيانات السابقة واتباع الخطوات نرسم الشكل (1 - 13)



شكل (1–13)

2) رسم المضلع باستخدام مراكز الفئات.

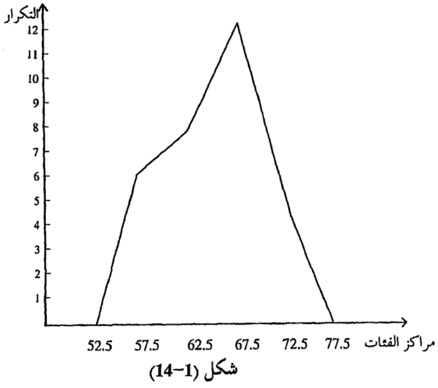
نقوم باتباع الخطوات التالية:-

- نرسم محورين متعامدين الافقي يمثل مراكز الفئات . والعمودي يمثل التكرارات
- نجد مركز الفئات .
- نعين النقاط على الرسم البياني حيث كل نقطة مسقطها الاول مركز الفئة والمسقط الثاني التكرار للفئة.
- نصل بين النقاط بشكل تتابعي.
- للحصول على مضلع تكراري مغلق نأخذ مركز فئة سابق بتكرار صفر ومركز فئة لاحق بتكرار صفر أيضاً.

مثال (1-20): البيانات التالية تمثل أوزان 30 طالبا مبوبة بالجدول (1-31):-

فئات الاوزان	التكرار	مراكز الفئات
-50	صفر	52.5
-55	6	57.5
-60	8	62.5
-65	12	67.5
-70	4	72.5
80-75	صفر	77.5

جدول (1-31)



شكل (1–14)

ويجدر بنا ان نذكر انه في حالة رسم المضلع التكراري باستخدام المدرج التكراري فان المساحة التي يحصرها المضلع مساوية للمساحة التي يحصرها المدرج التكراري لان المضلع يحذف اجزاء من المدرج ويضيف له اجزاء وهذه أي المحذوفة والمضافة متساوية في المساحة.

جـ – المنحنى التكراري لرسم المنحنى التكراري نتبع نفس الخطوات التي اتبعناها في رسم المضلع التكراري ولكن الفرق بينهما ان الوصل بين النقطة والنقطة التي تليها في المنحنى تكون بخطوط منحنية اما في المضلع بخطوط مستقيمة . وعادة يستخدم المنحنى في الحالات التي تكون فيها البيانات كبيرة الحجم وذات فئات اطوالها صغيرة والمتغير مستمر مثل الزمن، الاطوال، الاوزان... الخ.

د– تمثيل الجداول التكرارية المتجمعة بيانيا.

1– المضلع التكراري المتجمع الصاعد.

2– المضلع التكراري المتجمع الهابط.

مثال(1-12) : الأرباح السنوية بآلاف الدنانير ل 30 محلا من كبرى المحلات التجارية في مدينة ما موزعة كما يلي والمطلوب تمثيل هذا الجدول بالمضلع التكراري المتجمع الصاعد والهابط.

فئات الربح	**10-14**	**15-19**	**20-24**	**25-29**	**30-34**
التكرار	0	4	6	15	5

الحل : نكون جدول الحل (1-32).

فئات الربح	**التكرار**	**الحدود الفعلية**	**نهاية الفئات**	**التكرار المتجمع الصاعد**
10-14	صفر	9.5 - 14.5	اقل من 14.5	صفر
15-19	4	14.5-19.5	اقل من 19.5	4
20-24	6	19.5-24.5	اقل من 24.5	10
25-29	15	24.5- 29.5	أقل من 29.5	25
30-34	5	29.5-34.5	اقل من 34.5	30

جدول (1 - 32)

ثم نبدأ باتباع خطوات رسم المضلع التكراري الصاعد.

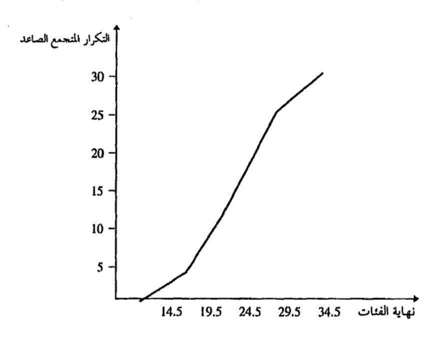
خطوات رسم مضلع تكراري متجمع صاعد

1) ننشأ الجدول التكراري المتجمع الصاعد كالجدول السابق.

2) نرسم خطين متعامدين ونمثل على المحور الافقي نهاية الفئات وعلى المحور الرأسي التكرار المتجمع الصاعد.

3) نرصد النقاط على الرسم البياني والتي مساقطها الافقية نهاية الفئات والرأسية التكرارات المتجمعة الصاعدة.

4- نوصل بخط مستقيم بين النقطة والنقطة التي تليها.



شكل (1-15)

أما المنحنى التكراري المتجمع الصاعد فنتبع في رسمه نفس الخطوات التي اتبعت في رسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد والفرق الوحيد هو ان نوصل بين النقطة والنقطة التي تليها بخط منحني بدلا من الخط المستقيم.

2) المضلع التكراري المتجمع الهابط

لرسم المضلع نتبع الخطوات التالية:-

1) ننشئ جدول تكراري متجمع هابط.
2) نرسم خطين متعامدين ونمثل على المحور الافقي بداية الفئات وعلى المحور الرأسي التكرار المتجمع الهابط.
3) نرصد النقاط على الرسم البياني والتي مساقطها الافقية بداية الفئات والرأسية التكرارات المتجمعة الهابطة.

4) نصل بخط مستقيم بين النقاط المتتابعة.

فئات الربح	التكرارات	الحدود الفعلية	بداية الفئات	التكرار المتجمع الهابط
19–15	4	19.5–14.5	اكبر من 14.5	30
24–20	6	24.5–19.5	اكبر من 19.5	26
29–25	15	29.5–24.5	اكبر من 24.5	20
34–30	5	34.5–29.5	اكبر من 29.5	5
39–35	صفر	39.5–34.5	اكبر من 34.5	صفر

جدول (1–33)

وعند رسم منحنى متجمع هابط نتبع نفس الخطوات ولكن نصل بين النقاط بالمنحنى.

مثال (1–22): الجدول التالي يمثل فئات الأجور لمائة عامل مبينة بالجدول التالي:

الفئات	70–	80–	90–	100–	120–110	المجموع
التكرار	8	22	40	25	5	100

المطلوب:1) أوجد مراكز الفئات لهذه الفئات.

2) أوجد عدد العمال الذين تزيد أجورهم عن 80 أو تساويه.

3) أوجد عدد العمال الذين تزيد أجورهم عن 100 أو تساويه.

4) أوجد عدد العمال الذين تقل أجورهم عن 90.

5) أرسم المدرج التكراري لهذا التوزيع.

6) أرسم المضلع التكراري لهذا التوزيع .

7) أرسم المنحنى التكراري لهذا التوزيع.

8) أرسم المنحنى المتجمع الصاعد لهذا .

9) أرسم المنحنى المتجمع الهابط لهذا التوزيع.

الحل: نكون جدول الحل (1–34):

فئات الأجور	التكرار	مركز الفئة	فئات أقل من >	تكرار صاعد	فئات أكبر من ≤	تكرار هابط
70–	8	75	70>	صفر	70 ≤	100
80–	22	85	80 >	8	80 ≤	92
90–	40	95	90 >	30	90 ≤	70
100–	25	105	100 >	70	100 ≤	30
120–110	5	115	100 >	95	110 ≤	5
	100		120 >	100	120 ≤	0

جدول(1–34)

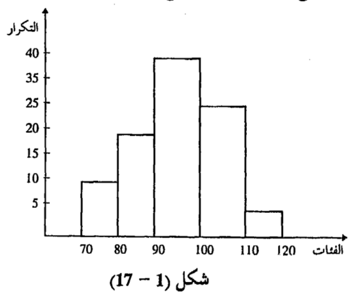
1) نجد مركز الفئة = $\frac{\text{الحد الأدنى للفئة الأولى + الحد الأعلى للفئة}}{2}$

2) عدد العمال= 22 + 40 + 25 + 5 = 92

3) عدد العمال= 5 + 25 = 30

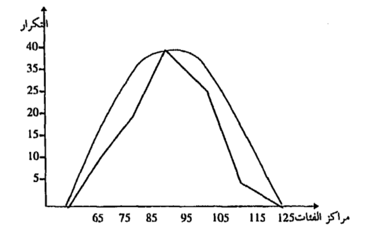
4) عدد العمال= 8 + 22 = 30

5) أم المدرج التكراري لهذا التوزيع فهو كما في شكل (1–17).



شكل (1 – 17)

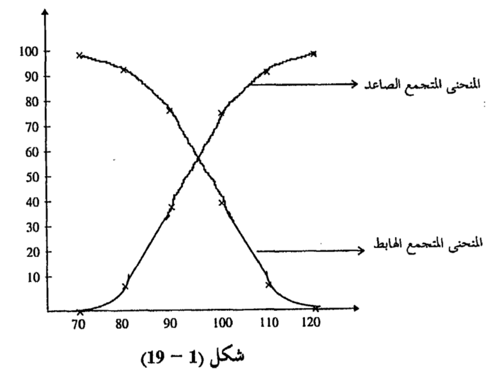
6 + 7) أما المنحنى والمضلع التكراري لهذا التوزيع فهو كما في شكل (1-18).



شكل (1 – 18)

نستنتج من الرسم أن المضلع مفتوح ولجعله مغلقاً نأخذ فئة سابقة وفئة لاحقة بتكرار صفر ثم نصل مع النقاط الجديدة لكي يصبح المضلع مقفلاً.

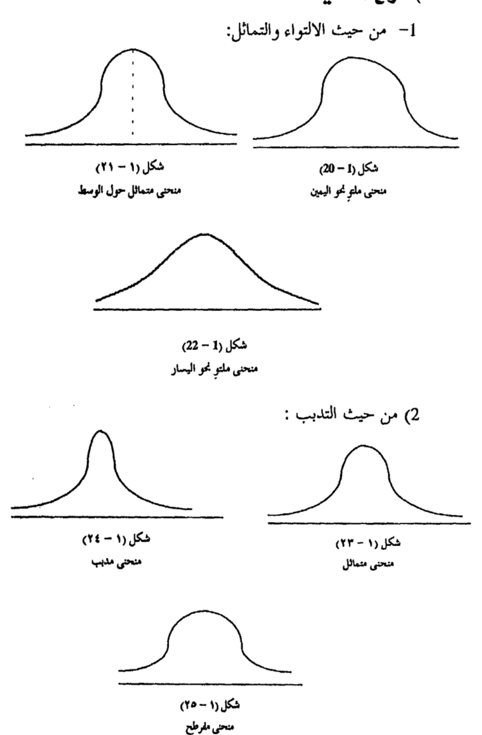
8 + 9) المنحنى المطلوب هو:



شكل (1 – 19)

1 - 7) أنواع المنحنيات:

1- من حيث الالتواء والتماثل:



شكل (1 – 20)
منحنى ملتوٍ نحو اليمين

شكل (١ – ٢١)
منحنى متماثل حول الوسط

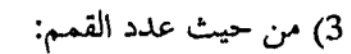
شكل (1 – 22)
منحنى ملتوٍ نحو اليسار

2) من حيث التدبب :

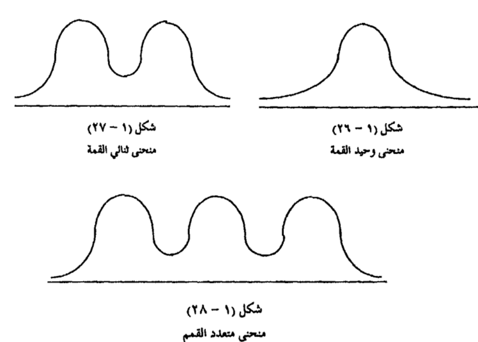
شكل (١ – ٢٣)
منحنى متماثل

شكل (١ – ٢٤)
منحنى مدبب

شكل (١ – ٢٥)
منحنى مفرطح



3) من حيث عدد القمم:



شكل (١ – ٢٦)
منحنى وحيد القمة

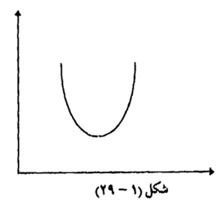
شكل (١ – ٢٧)
منحنى ثنائي القمة

شكل (١ – ٢٨)
منحنى متعدد القمم

1 - 8) أشكال المنحنيات:

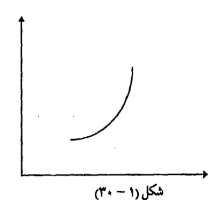
تتمثل أشكال المنحنيات بالأشكال والتسميات التالية:

1- الشكل النوني.



شكل (١ – ٢٩)

2- الشكل اللامي.



شكل(١ - ٣٠)

أمثلة إضافية:

مثال (1-23):في الجدول التكراري التالي توزيع 500 موظف حسب الأجر الشهري بالدينار، بناءاً على بيانات العينة العشوائية المختارة من مجتمع العاملين في احدى الشركات. كما هو مبين في الجدول (1-35)

الفئات	0-	100-	250-	500-1000
عدد العمال	200	150	125	25

جدول (1-35)

المطلوب:1) تسمية جدول تكراري.

2) ايجاد جدول التكرار المعدل.

3) رسم المضلع التكراري والمنحنى التكراري لجدول التكرار المعدل.

4) تسمية المنحنى الناتج من حيث التماثل.

5) حساب نسبة العمال الذين تزيد أجورهم عن 75 دينار

6) حساب نسبة العمال الذين تقل اجورهم عن 300 دينار

7) حساب نسبة العمال الذين تقع اجورهم بين 150 دينار، 300دينار.

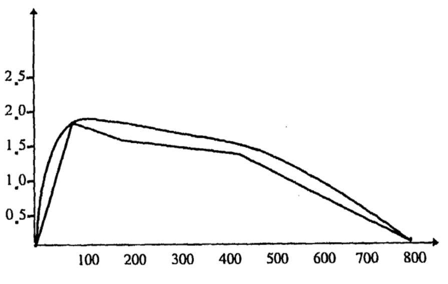
الحل: 1- نكون جدول الحل (1-36)

فئات الدخل	عدد العمال	التكرار المعدل $ك_ر$	مراكز الفئات $س_ر$	$ك_ر × س_ر$	فئات أقل من	التكرار المعدل التجميعي
-0	200	2	50	100	100 >	2
-100	150	1	175	175	250>	3
-250	125	0.5	375	187.5	500>	3.50
1000-500	25	0.05	750	37.5	1000>	3.55
	500	3.55		500		

جدول (1-36)

2) التكرار المعدل= $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{طول الفئة}}$

3) بناءًا على النتائج في 2 المطلوب رسم المضلع التكراري والمنحنى التكراري كما في شكل (31-01)



شكل (1-31)

4) غير متماثل وانما ملتو نحو اليمن.

5) لحساب نسبة العمال الذين تقل أجورهم عن 75 دينار: نجد عدد العمال ضمن الفترة المطلوبة كما هي موضح بالشكل:

75

0 100

شكل (1–32)

طول فئة التكرار:

100 ← 200

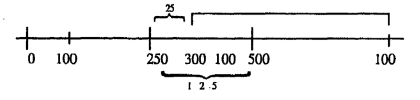
75 ← س $\frac{100}{75} = \frac{200}{\text{س}}$ وبالضرب التبادلي ←

$\therefore \text{س} = \frac{200 \times 75}{100} = 150$ موظف

نسبة العمال الذين تقل اجورهم عن 75= $\frac{150}{500} = \frac{3}{10}$

6) لحساب نسبة العمال الذين تزيد اجورهم عن (300) دينار.

نجد أولاً تكرار العمال ضمن هذه الفترة وذلك بالتمثيل على خط الأعداد والفترات.



شكل (1–33)

طول فئة التكرار:

250 ← 125

50 ← س $\therefore \text{س} = \frac{50 \times 125}{250} = 25$ موظف

تكرار الفئة المطلوبة= 100+25= 125

نسبة العمال الذين تزيد اجورهم عن 300= $\frac{125}{500} = \frac{1}{4}$

7) لحساب نسبة الذين تتراوح اجورهم بين 150،300

نجد عدد العمال للفترة المطلوبة في شكل (1 - 34)

0 100 150 100 250 300 500

200 150 125

شكل (1-34)

طول فئة التكرار:

150 ← 150

50 ← س ∴ س = $\frac{125 \times 50}{250}$ = 25 موظف

تكرار الفئة المطلوبة=100+25=125

نسبة العمال = $\frac{125}{500} = \frac{1}{4}$

مثال(1-24):البيانات التالية تمثل اوزان 50 طالبا مبينة كما يلي :

67	59	48	38	47	51	67	72	69	48
59	41	62	41	42	32	42	38	35	21
64	43	79	55	27	67	61	32	47	35
43	58	62	69	29	55	65	54	51	27
31	62	55	65	51	53	67	69	55	42

جدول (1 - 37)

المطلوب: 1) تكوين جدول تكراري

2) تحديد مراكز الفئات

3) التكرار النسبي والمئوي

4) تمثيل البيانات بواسطة المدرج التكراري

5) تمثيل البيانات بواسطة المنحنى التكراري

6) تمثيل البيانات بواسطة المضلع التكراري

7) عدد الطلاب الذين اوزانهم تقع بين 53-69.

8) عدد الطلاب الذين تزيد اوزانهم عن 40 كغم

9) عدد الطلاب الذين تقل اوزانهم عن 45 كغم

الحل: 1) لتكوين جدول التكرار

1) نحدد المدى = أعلى قيمة- ادنى قيمة+1=79-21+1=58+1=59.

وليكن عدد الفئات = 6 حيث أن 5 ≤ عدد الفئات ≤ 10

طول الفئة = $\frac{\text{المدى}}{\text{عدد الفئات}} = \frac{59}{6} = 9.9 \approx 10$

ثم نبدأ بتكوين الجدول (1-37):

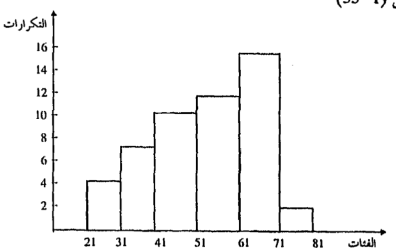
الفئات	التكرار	مركز الفئة	التكرار النسبي	التكرار المئوي
21-	4	26	$\frac{4}{50}$	0.08
31-	7	36	$\frac{7}{50}$	0.14
41-	11	46	$\frac{11}{50}$	0.22
51-	12	56	$\frac{12}{50}$	0.24
61-	14	66	$\frac{14}{50}$	0.28
71- 81	2	76	$\frac{2}{50}$	0.04
المجموع	50		$\frac{50}{50}$	1.00

جدول (1 - 37)

2) مركز الفئة= $\frac{\text{الحد الادنى للفئة الاولى+الحد الادنى للفئة الثانية}}{2} = \frac{31+21}{2} = 26$

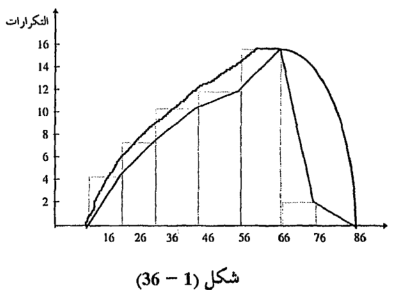
3) التكرار النسبي للفئة = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{التكرار الكلي}}$

4) المدرج التكراري: هو عبارة عن مستطيلات متلاصقة قواعدها هي الفئات وارتفاعاتها التكرارات المقابلة لكل فئة. وتمثيل البيانات بالمدرج التكراري كما في شكل (1-35)



شكل (1 – 35)

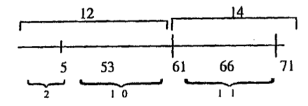
5) المنحنى التكراري كما هو موضح في الشكل (1-36)



شكل (1 – 36)

6) المضلع التكراري كما هو موضح في الشكل (1-36).

7) نجد عدد الطلاب من الشكل (1-37):



شكل (1-37)

$$10 \leftarrow 12$$

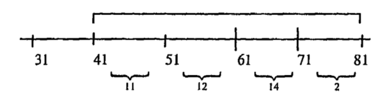
$$2\leftarrow \quad س \qquad \therefore س = \frac{12\times2}{10} = 2.4 \approx 2.5$$

$$10 \leftarrow 14$$

$$8\leftarrow \quad س \qquad \therefore س = \frac{14\times8}{10} = 11.2 \approx 11$$

∴ عدد الطلاب الذين تتراوح أوزانهم بين 53، 69 هو 10 + 11= 21 طالب

8) نجد عدد الطلاب الفترة المطلوبة كما في الشكل (1-38):



شكل (1-38)

40 − 31 = 9 ، 10 طول الفئة ويقابلها تكرار 7

$$10 \leftarrow 7$$

$$9 \leftarrow \quad س \qquad \therefore س = \frac{7\times9}{10} = 6.3 \approx 6$$

عدد الطلاب = 1 + 11 + 12 + 14 + 2 = 40

9) نجد عدد الطلاب للفترة المطلوبة كما في الشكل (1-39):

21 31 41 45 51

4 7 4

شكل (1-39)

10 ← 11

4 ← س $\therefore$ س = $\frac{11 \times 4}{10} = 4.4 \approx 4$

عدد الطلاب الذين تقل أوزانهم عن 45 = 4 + 7 + 4 = 15 طالب

تمارين عامة على الفصل الأول

س1– إذا كانت مراكز الفئات للبيانات المبوبة في جدول تكراري كالتالي:–

32، 35، 38، 41، 44

أوجد مايلي:

1) طول الفئة.

2) الفئات الفعلية للتوزيع.

3) فئات التوزيع.

س2 :– البيانات التالية تمثل عدد أمتار النسيج المصنوعة في 30 مصنعاً للنسيج خلال اسبوع بآلاف الأمتار.

40	49	57	46	59	40
39	51	58	47	39	44
48	53	41	61	52	56
42	55	60	62	56	61
44	54	43	63	43	63

أوجد ما يلي:–

1) مبتدئا بالعدد 39 شكل جدولا تكراريا ذات فئات منفصلة وطول كل فئة 5 وحدات.

2) كم عدد فئات الجدول

3) ارسم مدرجا تكراري.

4) ارسم مضلعا تكراريا عن طريق مركز الفئات.

5) ارسم مضلعا تكراريا متجمعا صاعدا.

6) اوجد التكرار النسبي لهذا التوزيع.

7) اوجد التكرار المئوي لهذا التوزيع.

8) كم مصنعا انتج اقل من 54 ألف متر.

9) كم مصنعا انتج اكثر من 48 ألف متر.

10) مبتدئا بالعدد 39 كون جدولا تكراريا اذا فئات بأطوال 4 وحدات شريطة أن تكون الفئات متصلة.

س3:– البيانات التالية تمثل اوزان 40 رجلا لاقرب كغم.

65	59	72	63	72	69	62	60
62	66	73	75	65	75	63	61
77	68	74	61	66	74	67	59
74	69	62	63	72	77	68	7
68	70	60	64	73	71	64	76

اوجد ما يلي:

1) مبتدئا بالعدد 59 كون جدولا تكراريا ذا فئات بطول 3 وحدات شريطة أن تكون هذه الفئات هي فئات متصلة وكم عدد هذه الفئات.

2) ارسم مدرجا تكراريا.

3) ارسم مضلعا تكراريا عن طريق مراكز الفئات.

4) ارسم مضلعا تكراريا متجمعا صاعدا.

5) اوجد التكرار النسبي لهذه التوزيع.

6) اوجد التكرار المئوي لهذا التوزيع.

7) كم عدد الذين تزيد اوزانهم عن 68 كغم أو تساوي 68 كغم.

8) كم عدد الذبن تقل اوزانهم عن 68 كغم.

9) مبتدئا بالعدد 58 كون جدولا تكراريا لفئات متصلة ويطول 4 وحدات.

س4:– كانت النتائج النهائية السنوية لاحدى المدارس الثانوية كما هي في الجدول التالي:–

فئات الطلاب	النسبة المئوية
الناجحون	٪65
الراسبون	٪10
المفصولون	٪5
حاملي المواد	٪20

والمطلوب تمثيل هذه البيانات بالقطاع الدائري

س5: البيانات التالية تمثل اعداد الخريجين لاحدى الكليات في احد الأعوام الدراسية حسب التخصص والجنس

التخصص	الذكور	الإناث	المجموع
كمبيوتر	80	40	120
رياضيات	60	30	90
اجتماعيات	40	20	60
لغة عربية	100	60	160

والمطلوب ما يلي:-

1- قارن بين مختلف التخصصات بواسطة الأعمدة.

2- مثل كل تخصص على حدة بالقطاع الدائري ثم مثل جميع التخصصات في دائرة واحدة.

3- مثل التخصصات بالأعمدة دون التطرق إلى الجنس.

4- مثل هذه البيانات بالخط البياني.

س6:- البيانات التالية تمثل الدخل الكلي لاحدى المحافظات خلال الأعوام 1980/ 1984.

قارن بين هاتين الظاهرتين عن طريق تمثيلها بالخط البياني:-

جدول الدخل الكلي والانفاق الكلي بآلاف الدنانير

السنوات	الدخل الكلي	الانفاق الكلي
1980	190	130
1981	160	80
1982	210	140
1983	230	150
1984	200	135

س7:- عرف ما يلي:-

علم الإحصاء، علمُ الإحصاء الوصفي، علم الاحصاء التحليلي، المصادر التاريخية للمعلومات، المصادر الميدانية للمعلومات، الاستمارة الاحصائية ، كشف البحث، صحيفة الاستبيان، طريقة المسح الشامل، العينة، العينة العمدية، العينة العشوائية، تبويب البيانات،التوزيع التكراري، الجدول التكراري، الفئة، التكرار النسبي، التكرار المئوي، الجداول المقفلة، الجداول المفتوحة ، الجدول المنتظم، الجدول غير المنتظم، الفئات المنفصلة، الفئات المتصلة، المدرج التكراري.

س8:- فيما يلي الجدول التكراري التجميعي لتوزيع الاجر الاسبوعي(بالدينار) لعمال مصنع ما عددهم"144" عاملاً.

اقل من	التكرار التجميعي
4	28
10	58
15	68
23	84
30	119
40	144

المطلوب:

1- رسم المنحنى التجميعي الصاعد والمنحنى التجميعي الهابط.

2- ما هي احداثيات نقطة تقاطع المنحنيين الصاعد والهابط.

3- بناءاً على المعلومات الموجودة في الجدول السابق:

اختيار العينة العشوائية المناسبة بكسر المعاينة(12/1)

س9: من المعلوم أن توزيع الطلبة المتخصصين في كلية الإقتصاد والعلوم الإدارية في الأعوام الدراسية 81/80 و81/ 82 كما هو مبين في الجدول التالي:

التخصص/ العام الدراسي	1981/1980	1982/1981
الاقتصاد والاحصاء	130	245
ادارة الاعمال	350	415
الادارة العامة	180	366
العلوم السياسية	60	122
المجموع	1000	1500

المطلوب:-

1- ما هو نوع (أو انواع) التصنيف الذي أدى الى تكوين هذا الجدول .

2- تمثيل البيانات الموجودة في الجدول.

أ- بطريقة الأعمدة (المستطيلات) المجزئة.

ب- بطريقة الدوائر المقسمة الى قطاعات.

3- اختيار عينة عشوائية مناسبة بكسر المعاينة (0.02) من بين طلبة 81/80

س11:- فيما يلي الجدول التكراري المتجمع الصاعد لعينة مؤلفة من (50) طالباً ناجحاً موزعة حسب علاماتهم في مساق الاحصاء (101).

أقل من	أقل من60	أقل من 70	أقل من 80	اقل من 90	اقل من 100
التكرار المتجمع	8	20	40	47	50

المطلوب :1) تكوين الجدول التكراري الأصلي

2) تكوين الجدول التكراري النسبي

3) رسم المنحنى المتجمع الصاعد.

س12: يبلغ عدد الطلبة في كلية الآداب (1000) طالباً من بينهم 600 من الاناث.

المطلوب اختيار العينة العشوائية الممثلة المناسبة بكسر المعاينة 0.020 وذلك من أجل تشكيل وفد طلابي، متبعا الخطوات بالترتيب مع ذكر هذه الخطوات.

س13:– فيما يلي جدول تكراري لتوزيع عينة مؤلفة من 60 طالبا حسب علاماتهم

فئات الطلاب	-40	-50	-60	-70	-80
عدد الطلبة	8	12	20	16	4

المطلوب:– 1. رسم المنحنى التجميعي الصاعد

2. حساب نسبة الطلبة الذين تقل علاماتهم عن 76.

3. حساب العلامة التي حصل على أعلى منها 10٪ من الطلبة.

س14:– فيما يلي جدول تكراري يبين توزيع 50 طالبا حسب معدلاتهم التراكمية.

فئات العلامات	-35	-60	-67	-76	-84
عدد الطلبة	2	21	18	8	1

المطلوب إيجاد:–

1– الجدول التكراري المعدل .

2– نسبة الطلبة الذين تتراوح علاماتهم بين(65و75)

3– إذا اختير ما نسبته 15٪ من الطلبة للدراسات العليا ما هي أدنى علامة تؤهل الطالب للحصول علىهذه الفرصة.

4– رسم المضلع التكراري،وبيان تماثله.

الفصـــل الثاني

مقاييس النزعة المركزية

مقدمة :

ان كلمة النزعة المركزية تعني الرغبة في التمركز والتكثف نحو رقم معـين وهـذا هو محور دراستنا في هذه الوحدة وكل الذي نوده كيفية حسـاب هـذه القيمـة لتمثـل باقي القيم تمثيلاً سليماً والتي تعتـبر مقياسـاً لبـاقي القيـم وقـد وجـد بـاحثوا الاحصـاء العديد من هذه المقاييس أهمها:

1) الوسط الحسابي 2) الوسيط 3) المنوال

هذا وسنتناول كل مقياس على حدى بنوع من التفصيل من حيـث الخصـائص وطرق ايجاده.

2-1) الوسط الحسابي :

تعريف: الوسط الحسابي لمجموعة مشاهدات هـو مجمـوع هـذه المشـاهدات مقسـوماً على عددها ويمكن كتابة هذه العلاقة الرياضية:

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع المشاهدات}}{\text{عدد المشاهدات}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1-2)$$

2 - 1 - 1) كيفية ايجاد الوسط الحسابي :

أ- اذا كانت لدينا البيانات غير مبوبة. وهذه تكون بصورتين.

1) البيانات غير مبوبة ومفردة(غير متكررة).

تعريف: اذا كان لدينا قيم المشاهدات $س_1$، $س_2$، $س_3$،......،$س_ن$ ، فان الوسط الحسابي لهذه المشاهدات $\bar{س}$ هو

$$\bar{س} = \frac{س_1+س_2+س_3+\dots+س_ن}{ن} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2-2)$$

او باستخدام رمز المجموع فاننا نكتب المتوسط الحسابي على الصورة

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر}{ن} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3-2)$$

حيث ر=1،2،......، ن.

مثال (2-1) : اذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية.

3،5،7،11،13، 21 والمطلوب ايجاد الوسط الحسابي لهذه البيانات.

الحل: باستخدام العلاقة أعلاه فان:

$$\bar{س} = \frac{3+5+7+11+13+21}{6} = \frac{60}{6} = 10$$

مثال (2-2): اذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من المشاهدات84 وكان مجموع هذه المشاهدات 420 أوجد عدد هذه المشاهدات.

الحل: من العلاقة الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$

$84 = \frac{420}{ن} \Leftarrow ن = \frac{420 \times 1}{84} = 5$ مشاهدات

2) اذا كانت المشاهدات متكررة في جدول تكراري فاننا نجد الوسط الحسابي (الوسط الحسابي الموزون او المرجح)

تعريف: اذا كان لدينا قيم المشاهدات $س_1، س_2، ....، س_ن$ وتكراراتها المقابلة على التوالي $ك_1، ك_2، ......، ك_ن$ فان الوسط الحسابي يكون

$$\bar{س} = \frac{س_1 \times ك_1 + س_2 \times ك_2 + ... + س_ن \times ك_ن}{ك_1 + ك_2 + ... + ك_ن} \quad .... (2-4)$$

او باستخدام صيغة المجموع

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر} \quad .... (2-5)$$

مثال(2-3): في شعبة ادارة الاعمال اعطى مئة طالب امتحان احصاء من عشر علامات وكان توزيع الطلاب حسب العلامات التي حصلوا عليها موزعة بالجدول (2-1):

العلامة	10	9	8	7	6	5	4
عدد الطلاب	5	16	21	35	13	8	2

جدول (2 - 1)

المطلوب: ايجاد الوسط الحسابي لهذه المشاهدات.

الحل: نلجأ لحل مثل هذه المسائل اما بتكوين جدول الحل (2 – 2) وباستخدام العلاقة المعطاة:

التكرار $ك_ر$	العلامة $س_ر$	$س_ر ك_ر$
5	10	50
16	9	144
21	8	168
35	7	245
13	6	78
8	5	40
2	4	8
100		733

جدول (2–2)

ثم نجد $\bar{س} = \frac{733}{100} = 7.33$

او نجد الوسط الحسابي من العلاقة التالية مباشرة $\bar{س} = \frac{\sum س_ر \times ك_ر}{\sum ك_ر}$

دون استخدام الجدول أعلاه على النحو التالي:

$$\bar{س} = \frac{2\times4+8\times5+13\times6+35\times7+21\times8+16\times9+5\times10}{2+8+13+35+21+16+5}$$

$$= \frac{8+40+78+245+168+144+50}{100} = \frac{733}{100} = 7.33$$

ب) ايجاد الوسط الحسابي للبيانات المبوبة:

هناك عدة طرق لايجاد الوسط الحسابي وسوف نستعرض في كتابنا هذا اهم الطرق المستخدمة.

1) طريقة استخدام التكرارات ومراكز الفئات او طريقة القانون العام: في هذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

- نجد مراكز الفئات $س_ر$.
- نجد مجموع حاصل ضرب مركز كل فئة بالتكرار المقابل لها أي $س_ر × ك_ر$.
- نجد مجموع التكرارات أي $\sum ك_ر$
- ونستخدم العلاقة التالية:

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر × ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر} \qquad \text{.......................} (6 - 2)$$

مثال(2-4): اوجد الوسط الحسابي لقيم المشاهدات المبوبة بالجدول(2-3) بالطريقة المباشرة.

الفئات	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	المجموع
التكرار	7	13	21	6	3	50

جدول (2 – 3)

الحل: نشكل الجدول (2 – 4) والذي يحتوي على جميع الحسابات المطلوبة لهذه الطريقة.

الفئات	التكرار $ك_ر$	مراكز الفئات $س_ر$	$س_ر × ك_ر$
20- 24	7	22	154=22×7
25- 29	13	27	351=27×13
30-34	21	32	672 =32×21
35-39	6	37	222=37×6
40-44	3	42	126=42×3
المجموع	50		1525

جدول (2 – 4)

وبتطبيق العلاقة (2-6).

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر}$$

فاننا نجد ان $\bar{س} = \frac{1525}{50} = 30.5$

2) ايجاد الوسط الحسابي باستخدام الوسط الفرضي:

لايجاد الوسط الحسابي بهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

- نجد مراكز الفئات $س_ر$.
- نأخذ أي مركز فئة كوسط فرضي وغالباً ما يكون مركز الفئة المقابلة للأكثر تكراراً ويرمز له بالرمز(أ).
- نجد انحراف مراكز الفئات عن الوسط الفرضي ونرمز لها بالرمز $ح_ر$
- نجد مجموع حاصل الضرب أي $\sum_{ر=1}^{ن} ح_ر \times ك_ر$
- نجد الوسط الحسابي من العلاقة.

$$\bar{س} = أ + \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ح_ر \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر} \qquad \text{.......................} \quad (7-2)$$

مثال (2-5) : اذا كان لدينا البيانات التالية والمبوبة بالجدول (2 - 5):

الفئات	30-	40-	50-	60-	70-	المجموع
التكرار $ك_ر$	2	9	21	11	7	50

جدول (2 - 5)

المطلوب ايجاد الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي.

الحل: نكون الجدول (2 - 6) والمتضمن الحسابات الواردة في الخطوات السابقة:

الفئات	التكرار	مراكز الفئات	$ح_ر = س_ر - أ$	$ح_ر \times ك_ر$
30-	2	35	20- =55-35	40-=20-×2
40-	9	45	10- =55-45	90-=10-×9
50-	21	(55)	0 =55-55	0=0×21
60-	11	65	10=55-65	110=10×11
70-	7	75	20=55-75	140=20×7
المجموع	50			120

جدول (2 - 6)

وليكن الوسط الفرضي أ=55 وباستخدام العلاقة أدناه فان:

$$\bar{س} = أ + \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ح_ر \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر}$$

نجد ان $\bar{س} = 55 + \frac{120}{50} = 55 + 2.4 = 57.4$

3) ايجاد الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة.

لايجاد الوسط الحسابي بهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية.

- نجد مراكز الفئات $س_ر$
- نأخذ وسط فرضي وليكن أ والمقابل للاكثر تكراراً من مراكز الفئات
- نجد انحراف مراكز الفئات عن الوسط الفرضي أي $ح_ر$
- نجد الانحرافات المختصرة ولتكن $\bar{ح}_ر = \frac{ح_ر}{\text{طول الفئة}} = \frac{ح_ر}{ل}$
- نجد حاصل ضرب $\bar{ح}_ر \times ك_ر$
- نجد مجموع حاصل ضرب $\bar{ح}_ر \times ك_ر$
- نجد المتوسط الحسابي من العلاقة.

$$\bar{س} = أ + \frac{\sum_{ر=1}^{ن} \bar{ح}_ر \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر} \times ل \quad \text{.................... (8-2)}$$

مثال(2-6): البيانات التالية تمثل اوزان 50 طالباً موزعين بالجدول (2- 7).

الفئات	54-50	59-55	64-60	69-65	74-70	المجموع
الطلاب	7	13	25	3	2	50

الجدول (2- 7)

المطلوب: ايجاد الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة.

الحل: نكون الجدول (2-8) والمتضمن جميع الحسابات الواردة في الخطوات السابقة.

الفئات	التكرار $ك_ر$	مراكز الفئات $س_ر$	الانحرافات عن الوسط الفرضي $ح_ر$	الانحرافات المختصرة $حَ_ر$	$حَ_ر × ك_ر$
54-50	7	52	10 = 62 -52	$\frac{10-}{5}$ = -2	14-=2-×7
59 -55	13	57	5- = 62 -57	$\frac{5-}{5}$ = -1	13-=1-×13
64-60	25	62	0 = 62 -62	$\frac{0}{5}$ = 0	0=0×25
69-65	3	67	5=62-67	$\frac{5}{5}$ = 1	3=1×3
74-70	2	72	10=62 -72	$\frac{10}{5}$ = 2	4=2×2
المجموع	50				20-

جدول (2 - 8)

وليكن الوسط الفرضي أ= 62

وبتطبيق العلاقة $\bar{س} = أ + \frac{\sum_{ر=1}^{ن} حَ_ر × ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر} × ل$

نجد ان $\bar{س} = 62 - \frac{20}{50} × 5 = 62 - 2 = 60$

مثال(2-7): البيانات التالية تمثل الأجر الأسبوعي لمائة عامل مبوبة بالجدول (2-9):

الفئات	-30	-35	-40	-45	-50	المجموع
التكرار	7	17	36	29	11	100

جدول (2 – 9)

المطلوب ايجاد:

أ) الوسط الحسابي بالطريقة المباشرة.

ب) الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات عن الوسط الفرضي.

جـ) الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة.

الحل: نكون الجدول (2-10) والمتضمن جميع الحسابات المطلوبة في الخطوات السابقة.

الفئات	التكرار ك ر	مراكز الفئات س ر	س ر × ك ر	ح ر = س ر - أ	ح ر × ك ر	ح َ ر = ح ر / ل	ح َ ر × ك ر
-30	7	32.5	227.5	10 --42.5-32.5	70- -10-×7	$2- - \frac{10-}{5}$	14- -2-×7
-35	17	37.5	637.5	5- -42.5-37.5	85--5-×17	$1- - \frac{5-}{5}$	17--1-×17
-40	36	42.5	1530	0-42.5-42.5	0-0×36	$0 - \frac{0}{5}$	0-0×36
-45	29	47.5	1377.5	5-42.5-47.5	145-5×29	$1 - \frac{5}{5}$	29-1×29
-50	11	52.5	577.5	10-42.5-52.5	110-10×11	$2 - \frac{10}{5}$	22-2×11
المجموع	100		4350		100		20

جدول (2 – 10)

ليكن الوسط الفرضي أ= 42.5

أ) الوسط الحسابي بالطريقة المباشرة $\bar{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر}$

$$\bar{س} = \frac{4350}{100} = 43.50$$

ب) الوسط الحسابي باستخدام الانحرافات عن الوسط الفرضي:

من العلاقة $\bar{س} = أ + \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ح_ر \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر}$

$$\bar{س} = 42.5 + \frac{100}{100} = 42.5 + 1 = 43.5$$

جـ) ايجاد الوسط الحسابي باستخدام الانحرافات المختصرة عن الوسط الفرضي أ .

من العلاقة: $\bar{س} = أ + \frac{\sum_{ر=1}^{ن} \bar{ح}_ر \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر} \times ل$

$$\bar{س} = 42.5 + \frac{20}{100} \times 5 = 42.5 + 1 = 43.5$$

نلاحظ ان الوسط الحسابي في الطرق الثلاث متساوية.

2 - 1 - 2) الوسط الحسابي المرجح:

لعل هذا المفهوم يفيد كثيراً في حالات دمج مجموعات ذات أحجام عينات مختلفة ولابد من التوقف عند هذا المفهوم لنتناول هذا التعريف.

تعريف: اذا كان لدينا مجموعة من العينات أحجامها $ن_1$، $ن_2$،...، $ن_ر$ وقمنا بعملية

دمج هذه العينات المختلفة وأردنا ايجاد الوسط الحسابي للمجموعات بعد الدمج فاننا نجد الوسط الحسابي للعينات بعد الدمج (الوسط الحسابي المرجح) من العلاقة التالية:

$$\bar{س} = \frac{\bar{س}_1 \times ن_1 + \bar{س}_2 \times ن_2 + ... + \bar{س}_ر \times ن_ر}{ن_1 + ن_2 + ... + ن_ر} \quad ....(9-2)$$

حيث أن $\bar{س}_1$، $\bar{س}_2$، ... $\bar{س}_ر$ هي الأوساط الحسابية لكل عينة.

مثال: اذا كان لدينا ثلاثة عينات احجامها على التوالي $ن_1 = 15$، $ن_2=20$، $ن_3=25$ وكانت اوساطها الحسابية $\bar{س}_1=45$، $\bar{س}_2=75$، $\bar{س}_3=60$ ودمجت العينات الثلاث معاً أوجد الوسط الحسابي المرجح للعينات بعد الدمج.

الحل: $\bar{س} = \frac{ن_1 \times \bar{س}_1 + ن_2 \times \bar{س}_2 + ن_3 \times \bar{س}_3}{ن_1 + ن_2 + ن_3}$

$$= \frac{60 \times 25 \times 75 \times 20 \times 45 \times 15}{25 + 20 + 15}$$

$$= \frac{1500 + 1500 + 675}{60} = \frac{3675}{60} = 61.25$$

2 – 1 – 3) خصائص الوسط الحسابي:

1) مجموع انحرافات للمشاهدات عن الوسط الحسابي = صفر.

مثال (2–8): اذا كان لدينا قيم المشاهدات 17، 21، 15، 27، 20 أثبت أن مجموع انحرافات المشاهدات عن الوسط الحسابي يساوي صفراً.

الحل: نجد الوسط الحسابي $\bar{س} = \frac{20 + 27 + 15 + 2 + 17}{5} = \frac{100}{5} = 20$

نجد الانحرافات للمشاهدات عن الوسط الحسابي:

$ح_1 = س_1 - \bar{س} = 17-20 = -3$

$ح_2 = س_2 - \bar{س} = 21-20 = +1$

$ح_3 = س_3 - \bar{س} = 15-20 = -5$

$ح_4 = س_4 - \bar{س} = 27-20 = +7$

$ح_5 = س_5 - \bar{س} = 20-20 = 0$

$\sum ح_ر = -3+1-5+7 =$ صفر.

وهذا ما يؤكد صحة الخاصية بأن مجموع الانحرافات عن الوسط الحسابي= صفر.

2) الوسط الحسابي يتأثر بالقيم المتطرفة.

مثال (2–9): اوجد الوسط الحسابي لقيم المشاهدات التالية.

37، 13، 50، 40، 2500

الحل: $\bar{س} = \frac{2500+40+50+13+37}{5} = \frac{2640}{5} = 528$

وهذا العدد بعيد كل البعد عن باقي قيم المشاهدات وهذا من جراء القيمة المتطرفة 2500 لكن لو استبعدنا القيمة المتطرفة فنلاحظ ان الوسط الحسابي سيصبح واقعياً.

مثال (2–10): اوجد الوسط الحسابي لقيم المشاهدات اعلاه بدون القيمة المتطرفة.

الحل: $\bar{س} = \frac{40+50+13+37}{4} = \frac{140}{4} = 35$

وهذه القيمة متقاربة مع قيم المشاهدات الاخرى.

3) يأخذ كل قيم المشاهدات ذات العلاقة في الاعتبار وهذا واضح من العلاقة الرياضية التالية:

$$\bar{س} = \frac{س_1 + س_2 + \ldots + س_ن}{ن}$$

مثال (2–11): اوجد المتوسط الحسابي لعلامات خمسة طلاب في امتحان الاحصاء كانت كما يلي 7،9،6،0،8

الحل: نجد $\bar{س} = \frac{8+0+6+9+7}{5} = \frac{30}{5} = 6$

4) المتوسط الحسابي هو متوسط لقيم المشاهدات في المجموعة وليس متوسط لتراتيب القيم كما هو الحال في الوسيط.

5) مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها أقل من مجموع مربعات انحرافات القيم عن أي قيمة اخرى.

مثال (2–12): أ) اوجد مربع انحرافات القيم عن الوسط الحسابي لقيم المشاهدات 3،5، 9،13، 10 ثم اوجد مربع الانحرافات عن القيمة 13.

وقارن بين النتيجة الأولى والثانية لتثبت صحة الخاصية أعلاه.

الحل: نجد: $\bar{س} = \frac{10+13+9+5+3}{5} = \frac{40}{5} = 8$

نجد:

$ح_1 = س_1 - \bar{س} = 3-8 = -5$ ، $ح_1^2 = 25$

$ح_2 = س_2 - \bar{س} = 5-8 = -3$ ، $ح_2^2 = 9$

$ح_3 = س_3 - \bar{س} = 9-8 = 1$ ، $ح_3^2 = 1$

$ح_4 = س_4 - \bar{س} = 13 - 8 = 5$ ، $ح_4^2 = 25$

$ح_5 = س_5 - \bar{س} = 10 - 8 = 2$ ، $ح_5^2 = 4$

ثم نجد $\sum ح_ر^2 = 64$

نجد الانحرافات لقيم المشاهدات عن المشاهدة 13

$ح_1 = س_1 - 13 = 3 - 13 = -10$ ، $ح_1^2 = 100$

$ح_2 = س_2 - 13 = 5 - 13 = -8$ ، $ح_2^2 = 25$

$ح_3 = س_3 - 13 = 9 - 13 = -4$ ، $ح_3^2 = 16$

$ح_4 = س_4 - 13 = 13 - 13 = 0$ ، $ح_4^2 = 0$

$ح_5 = س_5 - 13 = 10 - 13 = -3$ ، $ح_5^2 = 9$

نجد أن $\sum ح_ر^2 = 150$

نلاحظ ان مجموع الانحرافات لقيم المشاهدات عن وسطها الحسابي اقل من مجموع انحرافات القيم عن اية قيمة اخرى لأن $64 < 150$.

5) عند اضافة عدد ثابت الى جميع قيم المشاهدات فاننا نضيف هذا العدد الى الوسط الحسابي.

6) عند ضرب عدد ثابت في جميع قيم المشاهدات فاننا نضرب الوسط الحسابي في نفس القيمة.

(2-2) الوسيط:

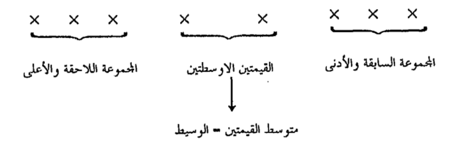
نبدأ التحدث عن مفهوم الوسيط باعطاء التعريف التالي.

تعريف: الوسيط هو عبارة عن القيمة الاوسطية لمجموعة من القيم رُتبت تصاعديـا أو تنازليا في حالة اذا كان عدد القيم فردية ومتوسط القيمتين الأوسطيتين. اذا كان عدد القيم زوجياً.

× × ×   ×   × × ×

المجموعة السابقة والأدنى   ↓ الوسيط   المجموعة اللاحقة والأعلى

هذا التمثيل اذا كان عدد القيم مفردة والترتيب تصاعدياً.



وهذا التمثيل إذا كان عدد القيم زوجياً.

كيفية ايجاد الوسيط:

أ) حساب الوسيط من البيانات غير المبوبة.

يوجد حالتان لحساب الوسيط من هذه البيانات.

1- اذا كان عدد القيم غير المبوبة فرديا.

اذا كان لدينا قيم المشاهدات $س_1$، $س_2$، $س_3$، ....، $س_ن$ وكانت ن فردية والحساب الوسيط نتبع الخطوات التالية.

- تُرتب البيانات ترتيبا تصاعدياً أو تنازلياً ولكن سنتاول في كتابنا الترتيب التصاعدي.

- نجد ترتيب الوسيط من العلاقة:

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{ن+1}{2} \quad .... (2-10)$$

حيث ن عدد القيم.

نجد قيمة الوسيط وهي القيمة المناظرة لترتيب الوسيط.

مثال(2-13) : اذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية 3،21،5،9،11،7،14. اوجد الوسيط لهذه القيم.

الحل: نتبع الخطوات اعلاه

1) نرتب قيم المشاهدات ترتيبا تصاعدياً كما في الجدول (2 – 11)

القيمة	3	5	7	9 ↑	11	14	21
الترتيب	1	2	3	4	5	6	7

جدول (2 – 11)

ثم نضع ترتيب كل قيمة

2) نجد ترتيب الوسيط حيث ترتيب الوسيط = $\frac{7+1}{2} = 4$ أي الترتيب الرابع

3) نجد قيمة الوسيط(و) وهي القيمة التي تناظر الترتيب الرابع والمشار لها بالسهم فيكون قيمة الوسيط و= 9

2 - اذا كان عدد القيم غير المبوبة زوجياً.

لايجاد الوسيط لهذه القيم نتبع الخطوات التالية.

1) نرتب قيم المشاهدات ترتيباً تصاعدياً.

2) نجد ترتيب الوسيطين من العلاقة التالية:

$$\text{ترتيب } و_1 \text{ (الوسيط الأول)} = \frac{ن}{2} \quad \text{.........................} (2-11)$$

$$\text{ترتيب } و_2 \text{ الوسيط الثاني} = \frac{ن}{2} + 1 \quad \text{أو} \quad \frac{ن + 2}{2} \quad \text{..............} (2-12)$$

3) نجد قيم $و_1$، $و_2$ المناظرة لترتيبهما.

4) نجد و(الوسيط) من العلاقة:

$$و = \frac{و_1 + و_2}{2} \quad \text{..................................} (2-13)$$

مثال (2-14): اوجد الوسيط لقيم المشاهدات 3،7،25،15،29،11،18،20

الحل: نتبع الخطوات التالية.

1) نرتب قيم المشاهدات ترتيباً تصاعدياً. ونضع مقابل كل قيمة ترتيبها.

29	25	20	18	15	11	7	3
8	7	6	↑ 5	↑ 4	3	2	1

2) نجد ترتيب الوسيطين $و_1$، $و_2$ من العلاقتين السابق ذكرهما، فيكون ترتيب

$و_1 = \frac{8}{2} = 4$ أي الرابع، وترتيب $و_2 = 4 + 1 = 5$ أي الخامس.

3) نجد القيم المناظرة لترتيبهما كما هو مشار بالأسهم فيكون قيمة $و_1 = 15$، وقيمة $و_2 = 18$.

4) نجد الوسيط و للقيم من العلاقة:

$$و = \frac{و_1 + و_2}{2} = \frac{15+18}{2} = \frac{33}{2} = 16.5$$

ب) حساب الوسيط للبيانات المبوبة.

قبل الخوص في ايجاد الوسيط للبيانات المبوبة وذكر الخطوات لها لابد من التعرف لمفهوم التكرار المتجمع الصاعد والهابط.

تعريف: التكرار المتجمع الصاعد هو اضافة تكرار الفئة(او الفئات) السابقة لتكرار الفئة اللاحقة ويبدأ التكرار المتجمع الصاعد بالصفر وينتهي بمجموع التكرارات الكلي ولعمل جدول متجمع صاعد نتبع الخطوات التالية

1) نضيف فئة سابقة في الجدول المعطى تكرارها صفراً.

2) نجد الحدود الفعلية لكل فئة.

3) نجد عمود الحدود الفعلية العليا ونسبقها برمز < للدلالة على أصغر من.

4) نجد عمود التكرارات المتجمعة بحيث يكون تكرار الفئة التي هي اقل من الحد الادنى المعطى = صفر

تكرار الفئة المتجمعة الاولى = تكرار الفئة الاولى المعطاة.

تكرار الفئة المتجمعة الثانية= تكرار الفئة الاولى المعطاة + تكرار الفئة الثانية المعطاة.

تكرار الفئة المتجمعة الثالثة=تكرار الفئة الاولى المعطاة+تكرار الفئة الثانية المعطاة+ الثالثة

.
.
.

تكرار الفئة المتجمعة الاخيرة= مجموع التكرارات جميعها.

والآن ننتقل الى كيفية ايجاد الوسيط من البيانات المبوبة.

ايجاد الوسيط من البيانات المبوبة :

لايجاد الوسيط للبيانات المبوبة نتبع الخطوات التالية:

1) نضيف للجدول المعطى فئة سابقة تكرارها صفراً.

2) نجد عمود للفئات الفعلية العلوية.

3) نجد عمود تكرار المتجمع الصاعد.

4) نجد ترتيب الوسيط من العلاقة.

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجموع التكرارات}}{2} = \frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ك}_{\text{ر}}}{2} \quad \text{.....(14-2)}$$

5) نحدد موقع ترتيب الوسيط بين التكرارات المتجمعة الصاعدة ونشير له بسهم.

6) نجد الفئة الوسيطية بحديها الفعليين الأدنى والأعلى وهي الفئة التي تقع تحت السهم الذي يشير لترتيب الوسيط.

7) نحدد الحد الأدنى للفئة الوسيطة.

8) نحدد تكرارا المتجمع السابق واللاحق لترتيب الوسيط.

9) نحدد طول الفئة الوسيطية.

10) نجد الوسيط من العلاقة:

$$\text{الوسيط} = \text{الحد الأدنى للفئة الوسيطية} + \frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق لترتيب الوسيط}}{\text{التكرار المتجمع اللاحق لترتيب الوسيط} - \text{التكرار المتجمع السابق لترتيب الوسيط}} \times \text{طول الفئة} \quad \text{..(15 - 2)}$$

مثال (2-15):البيانات التالية تمثل الاجور الشهرية لمائة عامل موزعين بالجدول (2-12).

فئات الاجور	69-60	79-70	89-80	99-90	109-100	المجموع
عدد العمال	6	12	47	25	10	100

جدول (2 - 12)

المطلوب: ايجاد مايلي.

أ) اوجد عدد العمال الذين رواتبهم اقل من 60 دينار.

ب) اوجد عدد العمال الذين رواتبهم بين 60واقل من 100دينار.

جـ)اوجد عدد العمال الذين رواتبهم 80دينار فأكثر.

د)اوجد الوسيط لهذه االاجور .

هـ) اوجد الوسيط بطريقة الرسم.

الحل: أ) عدد العمال الذين تقل رواتبهم عن 60=صفر.

ب) عدد العمال الذين رواتبهم بين 60 وأقل من 100دينار.

= 6+12+47+25= 90 عاملاً.

جـ) عدد العمال الذين رواتبهم 80 دينار فأكثر = 47+25+10=82 عاملاً.

د) لايجاد الوسيط نتبع الخطوات السابقة ونشكل الجدول (2-13) الذي يشمل جزءاً من الخطوات.

الفئات	تكرار الفئة	الفعات الفعلية	الفئات الفعلية العليا	التكرار المتجمع الصاعد
59−50	صفر	59.5−49.5	59.5 >	صفر
69−60	6	69.5−59.5	69.5 >	6
79−70	12	79.5−69.5	79.5 >	18
89−80	47	89.5− 79.5	89.5 >	65
99−90	25	99.5−89.5	99.5 >	90
109−100	10	109.5−99.5	109.5 >	100
	100			

التكرار السابق لترتيب الوسيط ← 6

ترتيب الوسيط ← 18

التكرار اللاحق لترتيب الوسيط ← 65

جدول (2−13)

ثم نتبع الخطوات الاربع التالية:

1) نجد ترتيب الوسيط= $\frac{100}{2} = 50$

2) نجد الفئة الوسيطية (79.5 − 89.5)

3) نجد الحد الأدنى للفئة الوسيطية=79.5.

4) نطبق العلاقة:

الوسيط = $79.5 + \frac{18-50}{18-65} \times 10$

$= 79.5 + \frac{10\times 32}{47} = 79.5 + \frac{320}{47}$

$= 79.5 + 6.81 = 86.31$

ونلاحظ ان قيمة الوسيط وقعت ضمن الفئة الوسيطية ولذا سميت الفئة الوسيطية.

هـ− لايجاد الوسيط بطريقة الرسم نتبع الخطوات التالية:

1) نرسم محورين متعامدين المحور الأفقي يمثل الحدود العليا الفعلية والمحور الرأسي

يمثل عليه التكرار المتجمع الصاعد.

2) نجد ترتيب الوسيط= $\frac{100}{2}$=50.

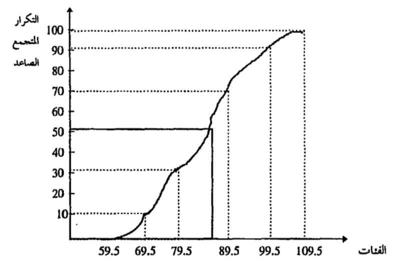
3) نعين النقاط التي احداثها الأول يمثل الفئات الفعلية والاحداثي الثاني يمثل التكرار المتجمع المقابل لها.

4) نرسم المنحنى المار بهذه النقاط ويسمى المنحنى التكراري المتجمع الصاعد.

5) نعين ترتيب الوسيط على المحور الرأسي ونقيم عمود من هذه النقطة على المحور الرأسي وموازي للمحور الأفقي يتقاطع مع المنحنى في نقطة.

6) ننزل من هذه النقطة عمود على المحور الأفقي يتقاطع معه في نقطة تدل على الوسيط.

والآن نقوم برسم المنحنى لتحديد قيمة الوسيط من الرسم كما في شكل (2-1).



شكل (2-1).

مثال (2-16): البيانات التالية تمثل اجور 100 عامل مبينة بالجدول (2 – 14).

فئات الأجور	80-	90-	100-	110-	130-120
التكرار	8	22	41	19	10

جدول (2 – 14)

والمطلوب :

1) إيجاد الوسيط بالطريقة الحسابية.

2) إيجاد الوسيط بالطريقة البيانية.

الحل: نكون جدول الحل (2 – 15)

فئات الأجور	التكرار	فئات أقل < 80	التكرار التجمعي	
80-	8	90 >	8	السابق
90-	22	100>	30	ترتيب الوسيط 50
100-	41	110>	71	اللاحق
110-	19	120>	90	
130-120	10	130>	100	
	100			

جدول (2 – 15)

الحل: 1) نجد ترتيب الوسيط= $\frac{\sum_{ر=١}^{ن} ك_ر}{2} = \frac{100}{2} = 50$

- نجد الفئة الوسيطية= 100- وحدها الأدنى = 100

- قيمة الوسيط و= $100 + \frac{50-30}{71-30} \times \frac{10}{1}$

$= 100 + \frac{20\times10}{41\times1} = 100 + \frac{200}{41} = 100+4.9 = 104.9$

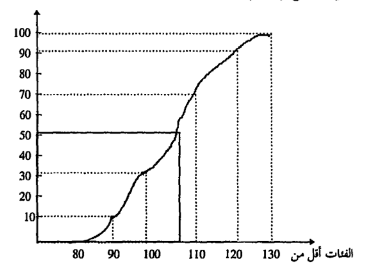
2) ايجاد الوسيط بالطريقة البيانية

- نرسم المنحنى المتجمع الصاعد
- نجد ترتيب الوسيط
- نقيم عمود من نقطة ترتيب الوسيط ليقطع المنحنى في نقطة مثل ن ثم من النقطة ن ننزل عمود يقطع محور الفئات في نقطة مثل م فتكون القيمة المقابلة للنقطة م هي قيمة الوسيط

$$\text{ترتيب الوسيط} : \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

قيمة الوسيط= 104.9

كما هو مبين في شكل (2-2).



شكل (2-2)

خصائص الوسيط

1) الوسيط لا يتأثر بالقيم المتطرفة كما هو الحال في الوسط الحسابي

مثال (2-17): اوجد الوسيط لقيم المشاهدات:

7، 21، 3، 2555، 31، 22، 47.

الحل: نرتب القيم ترتيبا تصاعديا.

- 3 7 21 22 31 47 2555

- نجد ترتيب الوسيط و= $\frac{1+7}{2}=4$ ∴ القيمة الرابعة هي الوسيط

- نأخذ القيمة المناظرة لترتيب الوسيط فنجد ان و=22 نلاحظ ان القيمة المتطرفة 2555 لا تؤثر على قيمة الوسيط.

2) الوسيط يتأثر بعدد القيم للمشاهدات .

مثال (2-18): اوجد الوسيط لقيم المشاهدات التالية.

7،11،5،33،19،4،8

الحل: نرتب قيم المشاهدات تصاعدياً

4	5	7	8	11	19	33
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)

- نجد ترتيب الوسيط = $\frac{1+7}{2}=4$ أي الرابع.

يكون الوسيط مساو للقيمة المناظرة للترتيب الرابع أي أن و =8.

ولو حذفنا المشاهدتين 5،4 مثلا ثم نعيد ترتيب البيانات

7	8	11	19	33
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)

نجد أن الوسيط و= 11 نلاحظ ان الوسيط تغير ولـم يبقى ثابتاً.

3) يأخذ بعين الاعتبار موقع القيم وليس متوسطها.

4) يمكن ايجاده من الجداول المفتوحة.

5) مجموع الانحرافات المطلقة لقيم المشاهدات عن وسيطها اقل من مجموع الانحرافات المطلقة للقيم عن اية قيمة أخرى في حالة البيانات غير المبوبة.

مثال (2–19): اوجد الانحرافات المطلقة لقيم المشاهدات 3،11،5،9،14 عن وسيط هذه القيم ثم اوجد الانحرافات المطلقة عن القيمة 5.

الحل: نرتب القيم ترتيبا تصاعديا

14	11	9	5	3
(5)	(4)	(3)	(2)	(1)

الوسيط 9

الانحرافات المطلقة عن الوسيط.

$|ح_1| = |3-9| = 6$

$|ح_2| = |5-9| = 4$

$|ح_3| = |9-9| = 0$

$|ح_4| = |11-9| = 2$

$|ح_5| = |14-9| = 5$

المجموع= 17

الانحرافات المطلقة عن القيمة 5

$ح_1 = |3-5| = 2$

$ح_2 = |5-5| = 0$

$ح_3 = |9-5| = 4$

$ح_4 = |11-5| = 6$

$ح_5 = |14-5| = 9$

المجموع=21

نلاحظ ان مجموع الانحرافات عن الوسيط هي اقل من مجموع الانحرافات عن اية قيمة اخرى.

2 - 3: المنوال:

تعريف: المنوال هو القيمة الاكثر تكراراً او شيوعاً بين قيم المشاهدات.

طرق ايجاد المنوال:

أ- ايجاد المنوال للبيانات غير المبوبة.

1) اذا لـم يتكرر اياً من القيم فلا يوجد منوالاً

مثال (2-20): لدينا قيم المشاهدات 7، 9، 11، 12، 15 أوجد منوال هذه القيم .

الحل: لايوجد منوال لهذه القيم حيث ان اياً من القيم لـم تتكرر.

2) اذا تكرر أحدها فيكون هناك منوالاً واحداً.

مثال (2-21): اوجد المنوال لقيم المشاهدات التالية 7، 11، 5، 7، 11، 7، 9

الحل: القيمة الاكثر تكرارا هي القيمة 7.

اما اذا كان لقيمتين نفس العدد من التكرار فيكون للقيم منوالان وهكذا يزداد المنوالات بزيادة العدد المتساوية التكرار على ان يبقى ولو على الاقل قيمة واحدة غير متكررةمن بين القيم.

مثال (2-22): اوجد المنوال او المنولات لقيم المشاهدات التالية

4،9،17،9،4،11

الحل: يوجد منولان هما 4،9 لان لهما نفس التكرار

ب) ايجاد المنوال للقيم المبوبة

لايجاد المنوال هناك طريقتان

1) الطريقة الجبرية

2) الطريقة الهندسية.

1) نبدأ بالطريقة الجبرية وهذه تقسم الى ثلاثة طرق منها:

1) طريقة الفروق لبيرسون.

لإيجاد المنوال لهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية :

- نجد الفئة المنوالية وهي الفئة التي تقابل الاكثر تكراراً من بين الفئات.
- نجد الفرق بين تكرار الفئة المنوالية والفئة السابقة لها وليكن $ف_1$
- نجد الفرق بين تكرار الفئة المنوالية والفئة اللاحقة لها ولتكن $ف_2$
- نجد المنوال من العلاقة التالية.

$$\text{المنوال} = \text{الحد الادنى للفئة المنوالية} + \frac{ف_1}{ف_1 + ف_2} \times ط(\text{طول الفئة المنوالية}) \quad ...... (2-16)$$

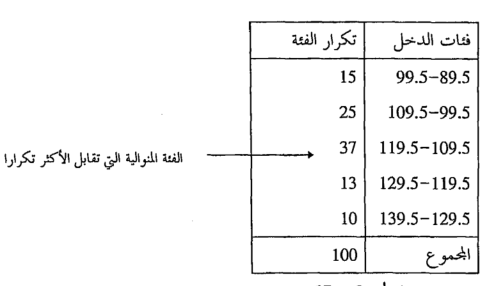
مثال (2-23): البيانات التالية تمثل الدخل الشهري لمائة أسره موزعة كما في الجدول (2-16).

فئات الدخل	0-99	100-109	110-119	120-129	130-139	المجموع
عدد الاسر	15	25	37	13	10	100

جدول (2- 16)

والمطلوب ايجاد المنوال بطريقة الفروق(بيرسون)

الحل: يمكن تكوين الجدول (2 - 17) والمحتوى على الفئات الفعلية.



فئات الدخل	تكرار الفئة
99.5-89.5	15
109.5-99.5	25
119.5-109.5	37
129.5-119.5	13
139.5-129.5	10
المجموع	100

جدول (2 – 17)

- نجد الفئة المنوالية وهي 119.5-109.5
- نجد الحد الادنى للفئة المنوالية= 109.5
- نجد $ف_1$= 37-25=12
- نجد $ف_2$= 37-13=24
- نجد المنوال من العلاقة السابقة.

$$\text{المنوال} = \frac{12}{24+12} \times 10$$

$$= \frac{120}{36}$$

$$= 109.5 + 3.33 = 112.83$$

2) طريقة الرافعة

لإيجاد المنوال بهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية.

- نحدد الفئة المنوالية وهي التي تقابل الاكثر تكراراً.
- نجد الحد الأدنى للفئة المنوالية.
- نجد $ك_1$: التكرار السابق لتكرار الفئة المنوالية.

- نجد $ك_2$: التكرار اللاحق لتكرار الفئة المنوالية.

نطبق العلاقة التالية.

$$\text{المنوال} = \text{الحد الادنى للفئة المنوالية} + \frac{ك_1}{ك_1 + ك_2} \times \text{طول الفئة} \qquad \ldots\ldots\ (2-17)$$

مثال (2–24) : أوجد المنوال للبيانات المبوبة بالجدول (2–18).

الفئات	20-	25-	30-	35-	40-	المجموع
التكرار	3	12	31	10	4	60

جدول (2 – 18)

أ) بطريقة الفروق. ب) بطريقة الرافعة.

الحل: نكون الجدول التالي بشكل رأسي (2 – 19).

الفئات	التكرار
20-	3
25-	12
30-	31
35-	10
40-	4
المجموع	60

جدول (2 – 19)

أ– بطريقة الفروق : نتبع ما يلي :

- نجد الفئة المنوالية = 30 وهي الفئة التي تقابل الأكثر تكراراً.
- نجد الحد الادنى للفئة المنوالية=30
- نجد $ف_1$=31-12=19
- نجد $ف_2$ = 31-10=21

- نجد المنوال من العلاقة.

المنوال $= 30+ \frac{9}{21+19} \times 5$

$= 30 + \frac{19}{40} \times 5 = 30 + \frac{95}{40}$

$= 30+2.375= 32.375$

ب- المنوال بطريقة الرافعة

- نجد الفئة المنوالية=30-

- نجد الحد الادنى للفئة المنوالية= 30

- نجد $ك_1 = 12$

- نجد $ك_2 = 10$

- نطبق العلاقة التالية.

المنوال= الحد الادنى للفئة المنوالية+ $\frac{ك_2}{ك_1 + ك_2} \times ل$

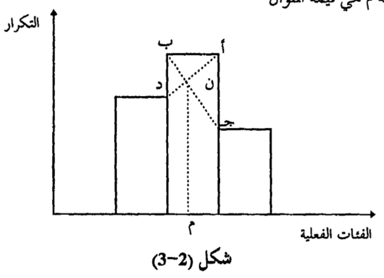
المنوال= $30 + \frac{10}{12+10} \times 5 = 30 + \frac{50}{22} = 30 + 2.27 = 32.27$

2) الطريقة الهندسية:

وهنا نتبع الخطوات التالية.

- نرسم محورين متعامدين المحور الافقي يمثل الفئات الفعليةأو الفئات المفتوحة والمحور الرأسي يمثل التكرارات.
- نرسم المستطيل الذي قاعدته الفئة المنوالية وارتفاعه الاكثر تكراراً
- نرسم مستطيل يلاصق المستطيل الاول ويسبقه بحيث ان قاعدته الفئة السابقة للفئة المنوالية وارتفاعه يقابل تكرار الفئة السابقة للفئة المنوالية.

- نرسم مستطيل ملاصق وقاعدته الفئة اللاحقة للفئة المنوالية وارتفاعه تكرار الفئة اللاحقة.
- نصل أ مع د كما في الشكل (2-3) ثم ب مع جـ فيتقاطع الخطان في ن.
- ننزل عمود من ن على المحور الافقي فيتقاطع معه في م فتكون القيمة المناظرة للنقطة م هي قيمة المنوال



شكل (2-3)

خصائص المنوال.

1) **لا يتأثر بالقيم لمتطرفة.**

مثال (2-25): اوجد المنوال لقيم المشاهدات التالية 3،5،5،90،27،3،5،7،3.

الحل: المنوال= 3 وهذا يعني ان المنوال لا يتأثر بالقيم المتطرفة .

2) يوجد بسهولة لانه من التعريف هو القيمة الاكثر تكراراً

3) يمكن ايجاده من الجداول المفتوحة.

4) يمكن ايجاده بالرسم كما ذكرنا في الطريقة الثالثة لايجاده.

أمثلة اضافية على المنوال

مثال (2–26): اوجد المنوال ان امكن لقيم المشاهدات التالية.

13،12،10،19،7

الحل: لا يوجد منوال لهذه المشاهدات لان ايا من القيم لـم يتكرر.

مثال(2–27): اوجد المنوال ان امكن لقيم المشااهدات التالية.

.17،19،17،25،25،10،19،17

الحل: المنوال= 17 لأن هذا الرقم له أكبر تكرار

مثال (2–28): اوجد المنوال او المنوالات لقيم المشاهدات التالية:

.11،19،11،19،17،7

الحل: يوجد منوالان هما 19، 11.

مثال (2–29): اوجد المنوال ان امكن لقيم المشاهدات التالية.

20،17،15،20،17،15

الحل: لا يوجد منوال لان جميع القيم لها نفس التكرار.

مثال (2–30):البيانات التالية تمثل اجور 100 عامل مبينا كما في الجدول (2 – 20):

الفئات	التكرار
-70	8
-80	22
-90	40
-100	25
-110	5
	100

جدول (2 – 20)

المطلوب: ايجاد المنوال:

أ) بطريقة الفروق (لبيرسون)

ب) بطريقة الرافعة

جـ) بطريقة المنوال التقريبي.

الحل: أ) طريقة بيرسون

1) نجد $ف_1$ = 40 − 22 = 18

$ف_2$ = 40 − 25 = 15

الفئة المنوالية = 90− وحدها الادنى =90

$$\text{قيمة المنوال} = 90 + \frac{18}{15+18} \times 10 = 90 + \frac{180}{33}$$

$$= 90 + 5.45 = 95.45$$

ب) طريقة الرافعة

$$\text{قيمة المنوال} = 90 + \frac{25}{22+25} \times 10$$

$$= 90 + \frac{250}{47} = 90 + 4.32 = 95.32$$

جـ) المنوال التقريبي $= \frac{100+90}{2} = \frac{190}{2} = 95$

2-4 : العلاقة الخطية بين الوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

1) في التوزيعات وحيدة المنوال والملتوية التواء بسيطاً والى الجهة اليمنى فان ترتيب المقاييس يكون

المنوال= الوسيط= الوسط الحسابي كما هو موضح في الشكل (2-4).

2) في التوزيعات وحيدة المنوال والملتوية التواءاً بسيطا والى الجهة اليسرى فان ترتيب المقاييس يكون الوسط الحسابي- الوسيط- المنوال كما في شكل (2-4) وبصيغة رموز

$$\bar{س} = و = م$$

3) في التوزيعات وحيدة المنوال والمتماثلة فان الوسط الحسابي والمنوال والوسيط تنطبق على بعضها البعض كما في الشكل (2-4).

$\bar{س} = و = م$

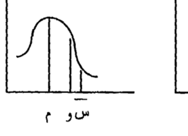
متماثل

شكل (2-4)

م و $\bar{س}$

التواء سالب أو نحو اليسار

شكل (2-5)



التواء موجب أو نحو اليمين

شكل (2-6)

ونستطيع ان نخرج بالعلاقات الخطية التالية التي تربط المقاييس الثلاث بعضها ببعض.

1) اذا كان التوزيع متماثلاً فان العلاقة التي تربط المقاييس الثلاث

الوسط الحسابي= الوسيط= المنوال ....(2-18)

2) اذا كان التوزيع غير متماثل فان العلاقة التي تربط المقاييس الثلاث هي:

الوسط الحسابي- المنوال= 3(الوسط الحسابي- الوسيط) .... (2-19)

أي $\bar{س} - م = \frac{3}{2}(\bar{س} - و)$ (و-م) وكذلك $\bar{س} = \frac{3و - م}{2}$ ....(2-20)

مثال (2–31): اذا كان الوسط الحسابي لتوزيع غير متمـاثل هـو 50 وكـان الوسـيط لهذا التوزيع هو 60 اوجد المنوال لهذا التوزيع.

الحل: من العلاقة اعلاه

50– م = 3(50–60)

50– م = 30–   ⇐ م = 50+30=80

مثال (2–32): اذا كان الوسط الحسابي لقيم مـن المشـاهدات = 45 وكـان الوسـيط لها= 32 أوجد المنوال لها.

الحل: من العلاقة أعلاه نجد أن:

45 – م = 3 (45 – 32)

45 – م = 135 – 96

45 – م = 39

45 – 39 = م

6 = م

مثال (2–33): اذا كانت مجموعة من المشاهدات تتوزع توزيعا طبيعياً متماثلاً وسـطه الحسابي= 36 أوجد المنوال لهذه المشاهدات.

الحل: التوزيع متماثل.

∴ $\overline{\text{س}}$ = و = م = 36

وعليه فإن المنوال : 36.

أمثلة متنوعة على جميع الأوساط

مثال (2–34) : اذا كان لدينا قيم المشاهدات التالي 7،15،8،9،8،13،10

المطلوب: ايجاد ما يلي:

1) الوسط الحسابي لقيم المشاهدات

2) الوسيط لهذه القيم

3) المنوال لهذه القيم.

الحل: 1) لايجاد الوسط الحسابي نجده من العلاقة التالية:

$$\bar{س} = \frac{7+15+8+9+8+13+10}{7} = \frac{70}{7} = 10$$

2) لايجاد الوسيط نرتب قيم المشاهدات ترتيباً تصاعدياً.

7	8	8	9	10	13	15
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)

نجد ترتيب الوسيط من العلاقة التالية

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{ن+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$$

∴ قيمة الوسيط = 9 وهي القيمة المناظرة للترتيب الرابع

3) قيمة المنوال هي القيمة الاكثر تكراراً من بين القيم.

∴ قيمة المنوال= 8

مثال (2–35): في شعبة مؤلفة من 100 طالب وجدان توزيع الطلاب حسب علاماتهم كما هو مبين في الجدول (2 – 21).

عدد الطلاب	فئات العلامات
8	40–
18	50–
20	60–
26	70–
16	80–
12	90–
100	

جدول (2 – 21)

المطلوب:

1) ايجاد نسبة الطلاب الذين تتراوح علاماتهم بين 60، 80.

2) ايجاد نسبة الطلاب الذين تتراوح علاماتهم بين 52، 67.

3) ايجاد نسبة الطلاب الذين تتراوح علاماتهم بين 57، 84.

4) ايجاد الوسط الحسابي بطرقه الثلاث.

5) ايجاد الوسيط لهذه البيانات.

الحل:

1) لايجاد نسبة الطلبة الذين تتراوح علاماتهم بين 60، 80 نرسم المخطط التالي:

لحصر عدد الطلبة الذين ضمن هذه الفترة لنجده = 20 +26=46

∴ نسبة الطلاب= $\frac{46}{100} = 0.46$

5) لايجاد نسبة الطلبة الذين تتراوح علاماتهم بين 52، 67 نرسم المخطط التالي

نجد اولاً عدد الطلبة من 50 الى 52 ثم نطرح الناتج من عدد طلبة الفترة من 50 الى 60 على النحو التالي

10 18

2 س

س= $\frac{18 \times 2}{10} = 3.6 \cong 4$

∴ عدد الطلبة في الجزء المطلوب اولاً = 18-4=14

نجد عدد الطلبة في المطلوب من 60 الى 67 على النحو التالي

10 20

7 س

س= $\frac{20 \times 7}{10} = 14$

∴ عدد الطلبة ضمن الفترة المطلوبة= 14+14=28 طالباً

نسبة الطلاب= $\frac{28}{100} = 0.28$

$\frac{10}{7} = \frac{18}{س} \Leftarrow س = \frac{18 \times 7}{10} = \frac{126}{10} \cong 13$

عدد الطلاب ضمن الفئة المطلوبة = 5+26+20+6=57∴ النسبة= $\frac{57}{100}=0.57$

7) أ) بايجاد الوسط الحسابي بطريقة القانون العام

$$= \frac{7100}{100} = 71$$

ب- ايجاد الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات عن الوسط الفرضي حيث أ الوسط الفرضي

8) نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد (2 – 22)

الفئات	التكرار	اقل من	التكرار المتجمع الصاعد
40-	8	50>	8
50-	18	60>	26
60-	20	70>	46
70-	26	80>	72
80-	16	90>	88
90-100	12	100>	100
	100		

جدول (2 – 22)

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجموع التكرار}}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

$$\text{قيمة الوسيط} = 70 + \frac{50-46}{72-46} \times 10 = 70 + \frac{4}{26} \times 10 = 70 + \frac{40}{26} = 70 + 1.54 = 71.54$$

2 – 5 : المئينات والرتب المئينية

2 – 5 – 1 : مفهوم المئين:

ان تقسيم مساحة المنحنى لتوزيع تكراري الى مئة جزء متساو يسمى بالمئينات فالمئين الاول م$_1$ هو القيمة التي يسبقها 1٪ من البيانات ويليها 99٪ من البيانات على فرض ان القيم مرتبة ترتيبا تصاعديا. والمئين الثلاثون(م$_{30}$) هو القيمة التي يسبقها 30٪ من البيانات ويليها 70٪ من البيانات على فرص ان القيم مرتبة ترتيبا تصاعديا.

2 – 5 – 2 : كيفية ايجاد المئينات

أ– اذا كانت البيانات غير مبوبة. نتبع الخطوات التالية:–

– نقوم بترتيب المشاهدات ترتيبا تصاعديا.

– نجد ترتيب المئين من العلاقة التالية:–

$$\text{ترتيب المئين المطلوب} = \frac{\text{المئين}}{100} \times (\text{عدد المشاهدات}+1) \quad ...(2-21)$$

وبشكل رموز يمكن صياغة العلاقة كما يلي

$$\text{ترتيب المئين} = \frac{م}{100} \times (ن+1) \quad ....(2-22)$$

– نجد موقع المئين.

– نجد قيمة المئين المناظرة لموقعه.

مثال (2–36): البيانات التالية تمثل الرواتب لسبعة عمال اوجد المئين الاربعين لهذه الرواتب

80،75،60، 90، 68، 88، 64

الحل: نرتب البيانات ترتيبا تصاعديا

60	64	68	75	80	88	90	القيمة
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	الترتيب

نجد ترتيب م$_{40}$ من العلاقة أعلاه:

$$\text{ترتيب م}_{40} = \frac{40}{100}(7+1) = 3.2$$

$3 \leq 3.2 \leq 4$ أي أن ترتيب $م_{40}$ يقع بين الترتيب الثالث والرابع

نجد القيم المناظرة للترتيبين الثالث والرابع وهي 68، 75

$$\therefore \text{ قيمة م}_{40} = \frac{75+68}{2} = \frac{143}{2} = 71.5$$

وتفسير الجواب ان 40٪ من مجموع الرواتب تقل عن 71.5 دينار و60٪ من الرواتب تزيد عن 71.5 دينار.

ب) ايجاد المئين لقيم المشاهدات المبوبة

ويتم بطريقتين

1) الطريقة الحسابية الاولى   2) الطريقة الحسابية الثانية

وخطوات هاتين الطريقتين تشبه تماما الخطوات المتبعة في ايجاد الوسيط لان الوسيط هو عبارة عن مئين 50

1) الطريقة الحسابية الاولى:-

- نشكل جدولا تكراريا متجمعا صاعداً.

- نجد ترتيب المئين= $\frac{\text{رقم المئين}}{100}$ × مجموع التكرارات .... (2-23)

وبصيغة رمزية= $\frac{م}{100} \times \sum_{ر=1}^{ن} ك_ر$ .... (2-24)

- نحدد موقع ترتيب المئين ونشير اليه بسهم.

- نجد الفئة المئينية وهي الفئة التي تقع اسفل السهم الذي يحدد موقع ترتيب المئين في الفئات المنفصلة. أما في الفئات المتصلة فان السهم يمر بين حديها.

نجد المئين من العلاقة التالية:-

$$\text{المئين} = \text{الحد الادنى للفئة المئينية} + \frac{\text{ترتيب المئين} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق}}{\text{التكرار المتجمع الصاعد اللاحق} - \text{التكرار المتجمع الصاعد السابق}} \times \text{طول الفئة} \quad \ldots\ldots(2-25)$$

مثال(2-37): البيانات التالية تمثل اطوال 40 طالباً موزعين كما في الجدول (2-23):

فئات الاطوال	-15	-160	-163	-166	169 -172
عدد الطلاب	-5	7	12	9	7

جدول (2 – 23)

المطلوب: 1) ايجاد المئين الأول (م$_{1}$) 2) ايجاد المئين 30(م$_{30}$)

3) ايجاد المئين 90(م$_{\%90}$)

الحل: نشكل اولا جدولا تكراريا متجمعا صاعدا (2 – 24).

فئات الاطوال	عدد الطلاب	نهاية الفئات العليا	التكرار المتجمع الصاعد
-157	5	157>	00
-160	7	160>	5
-163	12	163>	12
-166	9	166>	24
172-169	7	169>	33
		172>	40
المجموع	40		

جدول (2 – 24)

نستخرج ترتيب م$_1$ = $\frac{1}{100} \times 40 = \frac{4}{10} = 0.4$ ونلاحظ هنا بأن ترتيب المئين هو أقل من التكرار المتجمع الصاعد للفئة الاولى(1) وعلى هذا الاساس لانستطيع حل السؤال بهذه الطريقة الا اذا اضفنا فئة سابقة وتكرارها صفر لان ترتيب أي مئين لابد ان يكون له تكرار متجمع صاعد سابق وتكرار متجمع صاعد لاحق.

- الفئة المئينية م$_1$= 157 واقل من 160
- الحد الادنى = 157
- طول الفئة المئينية= 157− 160
- التكرار السابق= 0 والتكرار اللاحق= 5 وبتطبيق القاعدة اعلاه نجد م$_1$من العلاقة

∴ قيمة م$_1$= $157 + \frac{\therefore -0.4}{\therefore -5} \times 3 = 157 + 0.24 = 157.24$

2) لايجاد المئين 30(م$_{30\%}$)

بالاعتماد على الجدول السابق

نجد ترتيب المئين 30= $\frac{30}{100} \times 40 = 12$

وفي هذه الحالة نلاحظ بأن ترتيب المئين جاء مطابقا لاحد التكرارات المتجمعة الصاعدة وهو 12 فان م $_{30\%}$ في هذه الحالة يساوي نهاية الفئة المناظرة للتكرار المتجمع الصاعد(12)= 163.

3) ايجاد مئين 90(م$_{90\%}$)

بناء على المعلومات الموجودة في الجدول اعلاه

نجد ترتيب المئين 90٪= $\frac{90}{100} \times 40 = 36$

الفئة المئينية=169 واقل من 172 وحدها الادنى 169

طول الفئة= $172-169=3$

التكرار المتجمع الصاعد السابق = 33

التكرار المتجمع الصاعد اللاحق= 40

قيمة $م_{90}$= $169+\frac{36-33}{40-33}\times3=169+\frac{3}{7}\times3=$

$169+\frac{9}{7}=169+1.28=170.282$

– ايجاد المئين بالطريقة الحسابية الثانية:

ان الخطوات لهذه الطريقة تتطابق تماما مع الخطوات المستخدمة في الطريقة الحسابية الثانية لايجاد الوسيط لان الوسيط هو مئين 50 ي $م_{50}$.

مثال(2–38): باستخدام البيانات الواردة في المثال اعلاه اوجد ما يلي:–

1) $م_{1\%}$ 2) $م_{90\%}$

الحل: لايجاد $م_{1\%}$ نتبع ما يلي:–

1) نجد ترتيب $م_{1}$= $\frac{1}{100}\times40=0.4$ ثم نحدد الموقع

	الفئة المئينية		التكرار المتجمع الصاعد	
3	157	س	0	5
	$م_{1}$		0.4	0.4
	163		5	

$\frac{س}{3}=\frac{0.4}{5}$ نضرب ضربا تبادليا فنجد أن 5س $=1.2$ ∴س= $\frac{1.2}{5}=0.24$

∴ مئين$_{1}$ ($م_{1}$) = الحد الادنى للفئة المئينية+ قيمة س= $157+0.24=157.24$

$=160+0.3=160.3$

2) **ايجاد مئين 90**

الفئة المئينية		التكرار المتجمع الصاعد	
169		33	
$م_{90}$	س ، 3	36	3 ، 7
172		40	

$\frac{س}{3}=\frac{3}{7}$ نضرب ضربا تبادليا فنجد أن 7س=9⇐ س = $\frac{9}{7}=1.28$

$\therefore$ $م_{90}$ = 169+1.28= 170.28

تفسير نتيجة $م_{1}$ = 157.24 ان 1٪ من اطوال الطلاب تقل عن 157.24 وان 99٪ من الطلاب تزيد اطوالهم عن 157.24

تفسير نتيجة $م_{90}$ ان 90٪ من الطلاب تقل اطوالهم عن 170.28 وان 10٪ من الطلاب تزيد اطوالهم عن 170.28

2-5-3) الترتيب المئيني:

نود أن نقارن بين المئين والترتيب المئيني. لو فرضنا انه يوجد لدينا جدول تكراري يحتوي على اطوال لعدد من الطلاب ونفترض اننا قمنا باستخراج المئين 80وحصلنا على قيمة رقمية هي 168.9 وتفسير هذه القيمة ان 80٪ من الطلاب تقل اطوالهم عن 168.9 وان 20٪ منهم تزيد اطوالهم عن 168.9 ولو فرضنا ان طالبا طوله 170 سم وطلب الينا ان نجد نسبة الطلاب الذين تقل اطوالهم عن هذه القيمة(170سم) فانه لابد من استخراج الترتيب المئيني

مثال (2-39): البيانات في جدول (2-25) تمثل الاجور الاسبوعية ل(40) عاملا أوجد نسبة العمال الذين تقل اجورهم عن 17 دينار

فئات الاجور	12-	14-	16-	20-18
عدد العمال	15	13	10	2

جدول (2 − 25)

الحل: نشكل الجدول (2-26):

فئات الاجور	عدد العمال	التكرار المتجمع الصاعد
12-	15	15
14-	13	28
16-	10	38
20-18	2	40

جدول (2 − 26)

نجد الترتيب المئيني من العلاقة التالية:

$$ق = ح + \frac{\frac{ك}{100} \times ج - س}{ف} \times ل \qquad (26 - 2)$$

حيث

ق= القيمة المعطاة والمراد استخراج الترتيب المئيني لها وفي المثال اعلاه ق=17

ح = الحد الادنى للفئة التي تقع فيها القيمة المعطاة

$\frac{ك}{100}$ = الترتيب المئيني

ج = مجموع التكرارات

س= التكرار المتجمع الصاعد للفئةالتي تسبق الفئة التي تقع فيها القيمة المعطاة

ف= التكرار العادي التي تقع فيها القيمة

ل= طول الفئة.

الحل: نطبق العلاقة أعلاه.

$$17=16+\frac{(28-40\times\frac{ك}{100})}{10}\times 2$$ نضرب جميع اطراف المعادلة في 10

$$170=160+(28-\frac{40ك}{100})\times 2$$ نفك القوس بالضرب في 2

$$170=160+\frac{80ك}{100}-56$$ نضرب جميع اطراف المعادلة في 100

$$17000=16000+80ك-5600$$

$$17000-16000+5600=80ك$$

$$6600=80ك$$

$$ك=\frac{6600}{80}=82.5\%$$

وتفسير هذا الجواب ان 82.5 من مجموع العمال تقل اجورهم عن 17 دينار.

مثال (2-40): البيانات التالية تمثل اوزان 50 طالبا موزعة كما هو في الجدول (2-27) والمطلوب ايجاد نسبة الطلاب الذين تقل اوزانهم عن 68 كغم.

فئات الاوزان	50-54	55-59	60-64	65-69	70-74	المجموع
عدد الطلاب	10	12	8	14	6	50

جدول (2 – 27)

الحل: نكون جدول الحل (2 – 28).

فئات الاوزان	عدد الطلاب	الحدود الفعلية	التكرار المتجمع الصاعد
54–50	10	54.5–49.5	10
59–55	12	59.5–54.5	22
64–60	8	64.5–59.5	30
69–65	14	69.5–64.5	44
74–70	6	74.5–69.5	50
المجموع	50		

جدول (2 – 28)

ثم بتطبيق العلاقة أعلاه:

$68=64.5+\frac{50\times\frac{\text{ك}}{100}-30}{14}\times 5$ نضرب جميع اطراف المعادلة في 14

$952=903+\left(\frac{50\text{ك}}{100}-30\right)\times 5$ نفك القوس بالضرب في خمسة

$952=903+\frac{250\text{ك}}{100}-150$ نضرب المعادلة في 100

$95200=90300+250\text{ك}-15000$ ننقل الثوابت في جهة والمتغيرات في الجهة الأخرى

$95200-9033+15000=250\text{ك}$

$4900+15000=250\text{ك}$

$19900=250\text{ك}$

$\text{ك}=\frac{19900}{250}=79.6\%$

2-6 : العشيرات والربيعات :

2 - 6-1) العشيرات :

مفهوم العشيرات: هو تقسيم مساحة المنحنى لتوزيع تكراري الى عشرة اقسام متساوية وكل قسم يسمى عشير. فمثلا العشير الثالث هو القيمة التي يسبقها $\frac{3}{10}$ البيانات ويليها $\frac{7}{10}$ من البيانات على فرض أن القيم مرتبة ترتيبا تصاعديا. والوسيط هو العشير الخامس ويوجد تسعة عشيرات.

2-6-1 : العشيرات وكيفية إيجادها :

لإيجاد العشيرات :

أ- البيانات غير المبوبة: وفي هذه الحالة نتبع الخطوات التالية:

- نرتب البيانات تصاعديا
- نجد ترتيب العشير
- نحدد الترتيب الادنى والترتيب الاعلى لترتيب العشير
- نجد القيم المناظرة للترتيبين
- نجد قيمة العشير من الوسط الحسابي للقيمتين المناظرتين للترتيبين.

مثال (2-41): البيانات التالية تمثل علامات 8 طلاب من 50 في مادة الاحصاء

41، 32، 46، 28، 36، 20، 35، 23

والمطلوب ايجاد:

1) العشير الثالث مع تفسير النتيجة
2) العشير الثامن مع تفسير النتيجة.

الحل: 1) لايجاد العشير الثالث نتبع الخطوات التالية:

- ترتب البيانات ترتيبا تصاعديا على النحو

القيم.	46	41	36	35	32	28	23	20
الترتيب	(8)	(7)	(6)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)

ترتيب العشير الثالث= $\frac{30}{100}(ن+1) = \frac{30}{100}(8+1) = \frac{30}{100}\times 9 = \frac{270}{100} = 2.7$

$2 < 2.7 < 3$ ترتيب العشير الثالث يقع بين الترتيب الثاني والثالث

نجد القيمتين المناظرتين للترتيب الثاني والثالث وهما على التوالي 23،28

∴ العشير الثالث= $\frac{28+23}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$

تفسير النتيجة (25.5) أي أن 30٪ من عدد الطلاب تقل علاماتهم عن 25.5 وان 70٪ من عدد الطلاب تزيد علاماتهم على 25.5

2) لايجاد العشير الثامن:

نستفيد من ترتيب البيانات في التمرين السابق

ترتيب العشير الثامن

$= \frac{80}{100}(ن+1) = \frac{80}{100}(8+1) = \frac{80}{100}\times 9 = \frac{720}{100} = 7.2$

$7 < 7.2 < 8$ نلاحظ ان ترتيب العشير الثامن يقع بين الترتيب السابع والثامن.

نجد القيمتين المناظرتين للترتيبين السابع والثامن وهما على التوالي 41،46

العشير الثامن= $\frac{46+41}{2} = \frac{87}{2} = 43.5$

تفسير النتيجة(43.5) أي أن 80٪ من الطلاب علاماتهم تقل عن 43.5 و20٪ من الطلاب علاماتهم تزيد عن 43.5

ب) العشيرات للبيانات المبوبة

وتوجد بطريقتين

1- الطريقة الحسابية الاولى 2- الطريقة الحسابية الثانية

وخطوات هاتين الطريقتين مطابقة تماما كالخطوات المتبعة في كل من الوسيط، والمئين، والربيعات.

مثال (2-42): أوجد العشير الثالث للبيانات المبوبة في الجدول (2 - 29)

الفئات	6-4	9-7	12-10	15-13	المجموع
التكرار	3	4	6	5	18

جدول (2 - 29)

الحل: لايجاد العشير الثالث نتبع الخطوات التالية:

- نشكل جدول الحل (2 - 30)

الفئات	التكرار	الحدود الفعلية	نهاية الفئات العليا	التكرار المتجمع الصاعد
6-4	3	6.5-3.5	6.5 >	3
9-7	4	9.5-6.5	9.5>	7
12-10	6	12.5-9.5	12.5>	13
15-13	5	15.5-12.5	15.5>	18

جدول (2 -30)

- ترتيب العشير الثالث($م_{30}$) = $\frac{30}{100} \times 18 = \frac{540}{100} 5.4 \approx 5$

الفئة العشيرية= 9.5-6.5

الحد الادنى للفئة العشيرية6.5

طول الفئة العشيرية=9.5-6.5=3

التكرار المتجمع السابق=3

التكرار المتجمع اللاحق=7

نطبق العلاقة التالية:

العشير المطلوب =

$$\text{الحد الأدنى للفئة العشيرية} + \frac{\text{ترتيب العشير} - \text{التكرار المتجمع السابق لترتيب العشير}}{\text{التكرار المتجمع اللاحق لترتيب العشير} - \text{التكرار المتجمع المسبق لترتيب العشير}} \times \text{طول الفئة} \quad (2\text{-}27)$$

العشير الثالث= $6.5 + 3\frac{3-5.4}{3.-7} = 6.5 + \frac{2.4}{4} = 6.5 + \frac{7.2}{4} = 6.5 + 1.8 = 8.3$

ايجاد العشير الثالث $م_{30}$ بالطريقة الحسابية الثانية

بناء على الجدول المشكل اعلاه نقوم بكتابة العمودين التالين:

التكرار المتجمع الصاعد		الفئة العشيرية	
4 [3 / 5.4] 2.4 / 7	س	[6.5 / العشير الثالث] / 9.5	3

$$\frac{س}{3} = \frac{2.4}{4}$$

بالضرب التبادلي نحصل على 4س=7.2

$$س = \frac{7.2}{4} = 1.8$$

العشير الثالث= الحد الادنى للفئة العشيرية+قيمة س

= 8.3=1.8+6.5

وتفسير النتيجة(8.3)هي أن 30٪ من مجموع البيانات تقل عن 8.3و70٪ من البيانات تزيد على هذه القيمة.

2-6-2) الربيعات

ان مفهوم الربيعات هو تقسيم مساحة المنحنى لتوزيع تكراري الى اربعة اجـزاء متساوية يسمى بالربيعات ويوجد ثلاثـة ربيعـات مرتبـة مـن اليسـار الى اليمـين وهـي الربيع الاول او الربيع الادنى او م$_{25}$ والربيع الثاني او الوسيط او م$_{50}$ والربيع الثالث او الربيع الاعلى اوم$_{75}$ وعلى فرض ان البيانات مرتبة ترتيبا تصاعديا فاننا نعرف كل ربيع على حده.

تعريف: الربيع الاول هو القيمة التي يسبقها ربع البيانات ويليها ثلاثـة اربـاع البيانـات. وسنرمز له بالرمز ر$_1$.

تعريف: الربيع الثاني هو القيمـة الـتي يسبقها نصـف البيانـات ويليهـا النصـف الآخـر. وسنرمز له بالرمز ر$_2$.

تعريف : الربيع الثالث هو القيمة التي يسبقها ثلاثة ارباع البيانات ويليها ربـع البيانـات. وسنرمز له بالرمز ر$_3$.

والربيعات هي من أشباه مقاييس النزعة المركزية ويمكن ايجادها:

أ- من البيانات غير المبوبة(المفردة) ومن أمثلتها:

1) الربيع الأدنى (الأول) (ر$_1$ أو م$_{25}$) وكيفية إيجاده.

- نرتب البيانات ترتيبا تصاعديا.
- نجد ترتيب الربيع الادنى من العلاقة التالية:

$$م_{25} = \frac{25}{100}(ن+1) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2-28)$$

- نجد موقع ترتيب الربيع الادنى بين التراتيب.

- نجد القيم المناظرة للتراتيب التي تحصر ترتيب الربيع الادنى.

- نجد قيمة الربيع الادنى من العلاقة.

قيمةالربيع الادنى= المتوسط الحسابي للقيمتين المناظرتين اللتين تحصران الربيع الادنى.

- الربيع الثاني(الوسيط($م_{50}$) يمكن ايجاده كما مر في الوسيط.

- ايجاد الربيع الثالث او $م_{75}$ او الربيع الاعلى ونتبع الخطوات التالية:

1) نرتب القيم ترتيبا تصاعديا.

2) نجد ترتيب الربيع الثالث من العلاقة.

$$\text{ترتيب الربيع الثالث } (م_{75}) = \frac{75}{100}(ن+1)$$

3) نحدد موقع ترتيب الربيع الثالث من بين التراتيب للقيم.

4) نجد القيم المناظرة للتراتيب التي تحصر الربيع الثالث.

5) نجد قيمة الربيع الثالث من االعلاقة.

قيمة الربيع الثالث= المتوسط الحسابي للقيمتين المناظرتين اللتان تحصران الربيع الاعلى.

مثال(2-43): البيانات التالية تمثل علامات ستة طلاب من عشرة درجات 5،6،8،7،1،9 اوجد مايلي :

1) الربيع الادنى مع تفسير النتيجة.

2) الربيع الاعلى مع تفسير النتيجة.

الحل: 1) لإيجاد الربيع الأدنى نتبع الخطوات التالية :

- نرتب البيانات تصاعديا على النحو التالي

10	9	8	7	6	5
(6)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)

- نجد ترتيب الربيع الادنى = $\frac{25}{100}(ن+1)=(1+6)\frac{1}{4}=7\times\frac{1}{4}=\frac{7}{4}=1.75$

- نحدد موقع الربيع الأدنى $1 < 1.57 < 2$

- نجد القيم المناظرة للترتيبين الاول والثاني وهما على التوالي 65،

الربيع الادنى= $\frac{6+5}{2}=\frac{11}{2}=5.5$

-ومعنى هذه النتيجة ان 25٪ من الطلبة تقل علاماتهم عن 5.5 وان 75٪ من الطلبة تزيد علاماتهم عن 5.5

2) الربيع الاعلى أو الثالث ($ر_3$ أو $م_{75}$)

لإيجاد الربيع الأعلى

نجد ترتيب الربيع الاعلى = $\frac{75}{100}(ن+1)=(1+6)\frac{3}{4}=7\times\frac{3}{4}=\frac{21}{4}=5.25$

نحدد موقع ترتيب المئين

$5< 5.25 <6$ أي ترتيب الربيع الاعلى يقع بين الترتيبين الخامس والسادس

نجد الارقام المناظرة للترتيب الخامس والسادس وهي على التوالي 9،10

∴ الربيع الاعلى= $\frac{10+9}{2}=\frac{19}{2}=9.5$ وتفسير النتيجة كما يلي

أي ان 75٪ من الطلاب علاماتهم تقل عن 9.5 وان 25٪ من الطلاب علاماتهم تزيد عن 9.5.

ب) ايجاد الربيعات من البيانات المبوبة

ويمكن ايجادها بطريقتين

1) الطريقة الحسابية 2) الطريقة البيانية

1) الطريقة الحسابية

وتقسم الى طريقتين:

1) الطريقة الحسابية الاولى 2) الطريقة الحسابية الثانية

ان الخطوات المتبعة لهاتين الطريقتين هي نفس الخطوات المتبعة لهاتين الطريقتين في كل من الوسيط والمئينات ولذلك لاداعي لذكرها مرة أخرى.

مثال (2–44): البيانات التالية تمثل الانفاق الشهري لعشر اسر موزعة كما في الجدول(2–31):

فئات الانفاق الشهري	70–79	80–89	90–99	100–109
عدد الاسر	2	3	1	4

جدول (2 – 31)

المطلوب ايجاد مايلي:

أ) ايجاد الربيع الادنى بالطريقة الحسابية الاولى والثانية.

ب) ايجاد الربيع الاعلى بالطريقة الحسابية الأولى والثانية.

جـ) ايجاد الربيع الادنى والاعلى بالطريقة البيانية

الحل: أ) ايجاد الربيع الادنى بالطريقة الحسابية الاولى والحسابية الثانية

نشكل جدول تكراري متجمع صاعد (2 – 32)

فئات الانفاق الكلي	عدد الاسر	الفئات الفعلية	نهاية الفئات	تكرار المتجمع صاعد
69-60	∵	69.5-59.5	69.5>	∵
79-70	2	79.5-69.5	79.5>	2 ترتيب الربيع الأدنى
89-80	3	89.5-79.5	89.5>	5
99-90	1	99.5-89.5	99.5>	6 ترتيب الربيع الأعلى
109-100	4	109.5-99.5	109.5>	10
المجموع	10			

جدول (2 – 32)

نجد ترتيب الربيع الأدنى = $\frac{25}{100}\times$ مجموع التكرارات

$$2.5=10\times\frac{25}{100}=$$

فئة الربيع الادنى وهي التي تقع اسفل السهم مباشرة= 89.5-79.5 أو فوق السهم في عمود نهاية الفئات.

الحد الادنى للفئة الربيعية=79.5

طول الفئة الربيعية=89.5-79.5=10

التكرار المتجمع السابق=2

التكرار المتجمع اللاحق=5

ايجاد الربيع الادنى حسب العلاقة.

الربيع الادنى $=79.5+\frac{2-25}{2-5}\times10$

$$81.17=1.67+79.5=\frac{5}{3}+79.5=10\times\frac{0.5}{3}+79.5=$$

ايجاد الربيع الادنى بالطريقة الحسابية الثانية

بالاعتماد على الجدول المشكل اعلاه نكتب العمودين التاليين:

التكرار المتجمع الصاعد		الفئة الربيعية	
3 [2 ، 2.5] 0.5 ، 5	س	[79.5 ، الربيع الادنى ، 89.5]	10

$$\frac{س}{10} = \frac{0.5}{3}$$

نتيجة للضرب التبادلي فان 3س=5 ⇐ س = 1.67

الربيع الادنى = الحد الادنى للفئة الربيعية+ قيمة س

= 81.17=1.67+79.5

2) ايجاد الربيع الأعلى بالطريقة الحسابية الاولى والثانية

ايجاده بالطريقة الاولى

نجد ترتيب الربيع الادنى = $\frac{75}{100} \times 10 = \frac{750}{100} = 7.5$

الفئة الربيعية=99.5−109.5

الحد الادنى=99.5

طول الفئة = 109.5−99.5=10

التكرار المتجمع الصاعد السابق=6

التكرار المتجمع الصاعد اللاحق=10

نجد الربيع الاعلى من العلاقة التالية:

الربيع الاعلى = $99.5 + \frac{7.5-6}{10-6} \times 10 = 99.5 + \frac{1.5}{4} \times 10$

$$103.25=3.75+99.5=\frac{15}{4}+99.5=$$

ايجاد الربيع الاعلى بالطريقة الحسابية الثانية

بالاعتماد على الجدول المشكل اعلاه نكتب العمودين التاليين:

الفئة الربيعية		التكرار المتجمع الصاعد
99.5		6
الربيع الاعلى (10)	س	7.5 (1.5) (4)
109.5		10

$$\frac{س}{10}=\frac{1.5}{4}$$

بالضرب التبادلي 4س=15

$$س=\frac{15}{4}=3.75$$

الربيع الاعلى = الحد الادنى للفئة الربيعية + قيمة س

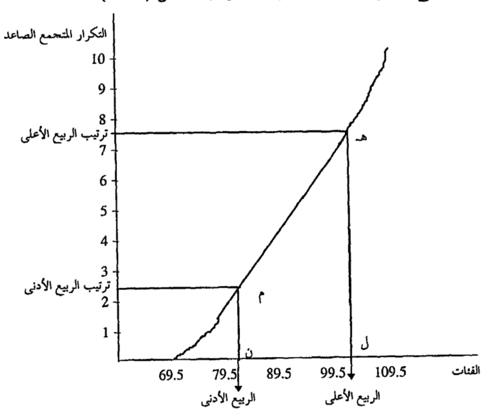
$$= 3.75 + 99.5 = 103.25$$

ب- طريقة ايجاد الربيع الادنى والاعلى بيانيا

وهذا هو المطلوب(3) من مطاليب السؤال السابق ونتبع الخطوات التالية:

- نرسم محورين متعامدين . ثم نرصد على المحور الافقي الحدود العليا للفئات وعلى المحور الرأسي التكرارات المتجمعة الصاعدة.
- نعين النقاط التي احداثيها الاول يمثل الفئات والاحداثي الثاني يمثل التكرار.
- نصل بين النقاط المعينة بخط منحن فيتكون لدينا منحنى تكراري متجمع صاعد.
- نجد ترتيب الربيع الادنى ثم نعينه على المحور الرأسي ونقيم من نقطة التعين عموداً على المحور الرأسي فيقطع المنحنى في نقطة مثل م.

- ننزل من النقطة م عموداً على المحور الافقي فيقطعه في نقطة ن فيتعين عندها قيمة الربيع الادنى وفي مثالنا نجد من الرسم ان قيمة الربيع الادنى هي 81.17 وبالمثل فإن الربيع الاعلى هو 103.25تقريبا انظر الى الشكل (2 – 7)



شكل (2 – 7)

تمارين عامة على الوحدة الثانية

س 1 : البيانات التالية تمثل فئات الاوزان لـ 100 طالب مبينة بالجدول التالي .

فئات الاوزان	عدد الطلاب
-40	8
-45	18
-50	44
-55	20
65-60	10

المطلوب: ايجاد ما يلي

1) الوسط الحسابي باي طريقة 2) الوسيط باي طريقة

3) المنوال باي طريقة 4) العشير الثالث.

5) المئين السبعون 6) الربيع الثالث.

7) الربيع الأول

س2 : البيانات التالية تمثل الاجور الاسبوعية لمائة عامل مبوبة بالجدول:

فئات الاجر	44-40	49-45	54-50	59-55	64-60
عدد العمال	10	20	40	20	10

والمطلوب 1) رسم المنحنى التكراري لهذه البيانات

2) ايجاد الوسط الحسابي لهذه البيانات بطرقه المختلفة.

3) ايجاد الوسيط لهذه البيانات بطرقه المختلفة.

4) ايجاد المنوال لهذه البيانات بطرقه المختلفة.

5) ايجاد $م_{10\%}$، $م_{25\%}$، $م_{85\%}$ ، $م_{75\%}$

س3: في عينة مكونة من (10) مفردات كانت قيم المشاهدات عن المتغير هي :-

$س_1$ = 4، $س_2$ =8، $س_3$ = 3، $س_4$=5، $س_5$=2، $س_6$=10، $س_7$=2، $س_8$= 4،

$س_9$= 4، $س_{10}$=8.

المطلوب 1) ايجاد الوسط الحسابي لهذه المشاهدات

2) تعيين قيمة الوسيط.

3) حساب الوسط التوافقي لقيم المشاهدات $س_1$ ، $س_2$، $س_5$

4) ايجاد $ر_1$، $ر_3$، $ع_1$، $ع_3$، $م_{80}$ لهذه المشاهدات. حيث $ر_1$: الربيع الأول، $ر_3$: الربيع الثالث، $ع_1$: العشير الأول، $ع_3$: العشير الثالث، $م_{80}$: المئين الثمانون.

الفصل الثالـث

مقاييس التشتت

مقدمة :

قبل الخوض في أهم مقاييس التشتت نرى لزاما توضيح فكـرة التشـتت واعطـاء معنـى واضح للتشتت.

معنى التشتت بشكل عام: هو تباعد القيم عن بعضها لكن هـذا بـدوره يحمـل بطياتـه عدة تساؤلات لعدم تجانس البيانات في بعض اوقاتـه لـذا اتفـق علـى ان يكـون هنـاك نقطة ثابتة لقياس التباعد او التقارب عن هذه النقطة ووجد ان الوسـط الحسـابي خـير ممثل لهذه النقطة حيث ان غالبية النقاط تكون قريبة نحو هذه النقطة وقد يكون

- هذا البعد كبيرا أي ان البيانات مبعثرة.
- هذا البعد قليلا أي ان البيانات غير مبعثرة.
- او قد يكون هذا البعد متساوي أي لايوجد تشتت

ولعل أهم مقاييس التشتت نذكر منها ما يلي

3 - 1 -: المدى

أ) **المدى للبيانات غير المبوبة** : وهو ابسط مقاييس التشتت وهو الفرق بين اكبر قيمة واصغر قيمة. ويمكن ايجاده من العلاقات التالية:

المدى = اكبر قيمة– اصغر قيمة .... (3 – 1)

ملاحظة: قد تبرز في بعض البيانات بعض القيم المتطرفـة كثـيراً وبمـا ان المـدى يعتمـد على اكبر واصغر قيمة لذا فانه يتأثر مباشرة ويكون البعد كبيرا. لذا ينصـح بحذف القيم المتطرفة الصغـرى والكـبرى. ويـبرز مقـاييس تشـتت مشـابهة

للمدى نذكر منها :

1) المدى المئيني = المئين الاعلى – المئين الادنى

= المئين التاسع والتسعون– المئين الاول = $م_{99} - م_1$ ......(2-3)

2) نصف المدى المئيني= $\frac{\text{المئين التاسع والتسعون – المئين الأول}}{2} = \frac{م_{99} - م_1}{2}$ ....(3-3)

3) المدى العشيري = العشير التاسع – العشير الاول = $ع_9 - ع_1$

= $م_{90} - م_{10}$ ....(4-3)

4) نصف المدى العشيري= $\frac{\text{العشير التاسع – العشير الأول}}{2}$ ....(5-3)

نصف المدى العشيري = $\frac{م_9 - م_{10}}{2}$ ....(6-3)

5) المدى الربيعي= الربيع الاعلى – الربيع الادنى

= $م_{75} - م_{25}$ ....(7-3)

6)نصف المدى الربيعي= $\frac{\text{الربيع الأعلى – الربيع الأدنى}}{2}$ ......(8-3)

= $\frac{م_{75} - م_{25}}{2}$

مثال(3–1):اذا كان لدينا البيانات التالية تمثل درجات عشرة طلاب من 50 وهي :

39، 41، 21، 27، 34، 43، 25، 37، 28، 22

والمطلوب ايجاد

1) المدى المطلق 2) نصف المدى الربيعي

الحل : لايجاد المدى المطلق نتبع ما يلي

- نرتب المشاهدات ترتيبا تصاعديا

43	41	39	37	34	28	27	25	22	21
(10)	(9)	(8)	(7)	(6)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)

1) المدى المطلق = اعلى مشاهدة − اصغر مشاهدة

$= 43 - 21 = 22$

2) لايجاد نصف المدى الربعي.

أ) نجد الربيع الادنى او $م_{25}$ كما يلي :

- ترتيب الربيع الادنى من العلاقة التالية

ترتيب الربيع الادنى $= \frac{25}{100}(1+10) = \frac{275}{100} = 2.75$

- نجد موقع ترتيب الربيع ويقع بين الترتيب الثاني والثالث.

- نجد القيم المناظرة للترتيبين الثاني والثالث وهما 22،25 تكون قيمة الربيع الاول $= \frac{1}{2}(22+25) = 23.5$

2) لايجاد الربيع الاعلى أي $م_{75}$ باتباع الخطوات التالية

- نجد ترتيب الربيع الاعلى من العلاقة.

ترتيب الربيع الاعلى $= \frac{75}{100}(1+10) = \frac{825}{100} = 8.25$

نجد موقع الترتيب من بين التراتيب فيقع بين الترتيب الثامن والتاسع

- نجد القيم المناظرة للترتيبين وهما 39، 41.

- فيكون قيمة الربيع الاعلى هي $= \frac{1}{2}(39+41) = 40$

وعليه فان نصف المدى الربيعي $= \frac{م_{75} - م_{25}}{2} = \frac{40 - 23.5}{2} = \frac{16.5}{2} = 8.25$

ب) ايجاد المدى المطلق للبيانات المبوبة :

نجد المدى المطلق من العلاقات التالية .

المدى المطلق = الحد الاعلى الفعلي للفئة العليا-الحد الادنى الفعلي للفئة الدنيا	....(3-9)

وهناك علاقة أخرى :

المدى المطلق = مركز الفئة العليا - مركز الفئة الدنيا	....(3-10)

ولتجنب القيم المتطرفة حتى نحصل على مقياس تشتت لـه فاعلية نجد احد المقاييس الواردة في البند السابق وذلك حسب وجود القيم المتطرفة في البيانات. وستتركز دراستنا على نوع منها وذلك نظرا لأهمية هذا المقياس واستخدامه في أكثر من مجال.

3-2) نصف المدى الربيعي وطرق ايجاده.

لقد استعرضنا في البند السابق كيفية إيجاد نصف المدى للبيانات غير المبوبة والآن نستخدم نفس الصيغ للقيم المبوبة.

$$\text{نصف المدى الربيعي} = \frac{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}{2}$$

$$\text{نصف المدى الربيعي} = \frac{م_{75} - م_{25}}{2}$$

ولتوضيح كيفية الاستخدام نورد المثال التالي :

مثال (3-2) : البيانات التالية تمثل الرواتب الشهرية ل 60 موظفاً يعملون في احد المؤسسات مبوبة كما في الجدول (3-1)

فئات الرواتب	90-99	100-109	110-119	120-129	130-139	140-149	150-159	المجموع
عدد الموظفين	5	9	11	17	11	3	2	60

جدول (3 - 1)

المطلوب: أ- ايجاد المدى المطلق

ب- ايجاد نصف المدى الربعي

الحل: نكون جدول الحل (3 – 2)

فئات الرواتب	عدد الموظفين	الحدود الفعلية	الحد الفعلي الاعلى	التكرار المتجمع الصاعد	مركز الفئة
99-90	5	99.5-89.5	99.5 >	5	94.5
109-100	9	109.5-99.5	109.5 >	14	104.5
119-110	11	119.5-109.5	119.5>	25	114.5
129-120	17	129.5-119.5	129.5>	42	124.5
139-130	11	139.5-129.5	139.5>	53	134.5
149-140	5	149.5-139.5	149.5 >	58	144.5
159-150	2	159.5-149.5	159.5>	60	154.5
المجموع	60				

جدول (3 – 2)

المدى المطلق = الحد الاعلى للفئة العيا – الحد الادنى للفئة الدنيا

= 159.5 – 89.5 = 70

المدى المطلق عن طريق مراكز الفئات

= 154.5 – 94.5 = 60

ب- ايجاد نصف المدى الربيعي من العلاقة التالية

$$\text{نصف المدى الربيعي} = \frac{\text{الربيع الثالث} - \text{الربيع الأول}}{2} \quad \text{.........} \ (3 - 11)$$

أو أي من الصيغ السابقة الذكر وكلها تؤدي إلى نفس المفهوم.

1) نجد الربيع الاول باتباع الخطوات التالية :

- نجد ترتيب الربيع الاول وهو

ترتيب الربيع الاول$= \frac{60\times25}{100} = 15$

نحدد موقع الربيع الاول في عمود التكرار المتجمع الصاعد ونشير اليه بالسهم.

- نحدد الفئة الربيعية وهي الفئة التي تقع اسفل السهم.

وهي $119.5-109.5$

- نجد الحد الادنى للفئة = 109.5.

- نجد الربيع الاول من العلاقة التالية.

الربيع الاول $= 109.5 + \frac{14-15}{14-25} \times 10 = 109.5 + \frac{10}{11} = 110.4$

2) نجد الربيع الثالث باتباع الخطوات التالية :

- نجد ترتيب الربيع الثالث

ترتيب الربيع الثالث $= 60 \times \frac{75}{100} = 45$

- نحدد موقع الترتيب على عمود المتجمع الصاعد.

- نشير الى الموقع بسهم .

- نحدد الفئة الربيعية وهي الفئة الواقعة اسفل السهم

$= (139.5-129.5)$

= نحدد الحد الادنى $=129.5$

نجد الربيع الثالث من العلاقة التالية

الربيع الثالث $= 1295 + \frac{42-45}{42-53} 10\times$

$= 129.5 + \frac{30}{11} = 129.5 + 2.73 = 132.23$ باستخدام اعلاقة أعلاه فإن

نصف المدى الربيعي= $\frac{132.23 - 110.40}{2} = 10.915$

3-3 : الانحراف المعياري :

لعمل هذا المقياس من أهم مقاييس التشتت وحتى نصل إلى مفهوم هذا المقياس فلابد من استعراض المقاييس التالية والتي ستؤدي بدورها إلى مقياس الانحراف المعياري.

3-3-1 : الانحراف المتوسط

تعريف : الانحراف المتوسط : هو مقياس من مقاييس التشتت يقيس بدقة الانحراف عن الوسط الحسابي وهو يمثل متوسط القيم المطلقة لإنحرافات قيم المشاهدات عن وسطها الحسابي. وقد تكون هذه المشاهدات.

أ) المشاهدات أو البيانات غير مبوبة :

ولإيجاد الانحراف المتوسط لهذه البيانات نتبع الخطوات التالية.

- نجد المتوسط الحسابي لقيم المشاهدات
- نجد الانحرافات المطلقة عن الوسط الحسابي من العلاقة.

$|ح_ر| = |س_ر - \bar{س}|$ حيث $ح_ر$ = هو انحراف كل مشاهدة عن وسطها الحسابي

- نجد الانحراف المتوسط من العلاقة

$$\text{الانحراف المتوسط} = \frac{\sum |ح_ر|}{ن} = \frac{\sum |(س_ر - \bar{س})|}{ن} \qquad .....(3-12)$$

حيث ن عدد المشاهدات

مثال (3-3): اوجد الانحراف المتوسط لقيم المشاهدات التالية

10 ، 14 ، 16 ، 13 ، 7

الحل : لحل مثل هذه المسائل نتبع الخطوات التالية

- نجد المتوسط الحسابي لمجموعة القيم

$$\bar{س} = \frac{10+14+16+13+7}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

- نجد الانحرافات المطلقة لقيم المشاهدات

$$|ح_1| = |س_1 - \bar{س}| = |7 - 12| = 5$$
$$|ح_2| = |س_2 - \bar{س}| = |13 - 12| = 1$$
$$|ح_3| = |س_3 - \bar{س}| = |16 - 12| = 4$$
$$|ح_4| = |س_4 - \bar{س}| = |14 - 12| = 2$$
$$|ح_5| = |س_5 - \bar{س}| = |10 - 12| = 2$$

فيكون الانحراف المتوسط والذي سنرمز له بالرمز أ.م.

$$أ.م = \frac{5+1+4+2+2}{5} = \frac{14}{5} = 2.8$$

ب- اذا كانت البيانات مبوبة

لذا نتبع الخطوات التالية

- نجد مراكز الفئات ولتكن $س_1$ ، $س_2$ ، ....، $س_ن$

- نجد الوسط الحسابي من العلاقة

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر}$$

- نجد الانحرافات المطلقة لقيم المشاهدات عن وسطها الحسابي على النحو

$ح_ر = س_ر - \bar{س}$ ثم نأخذ القيمة المطلقة لتصبح :

$$|ح_ر| = |س_ر - \bar{س}|$$

- نجد حاصل ضرب $= |ح_ر| \times ك_ر$

- نجد الانحراف المتوسط من العلاقة

$$\text{الانحراف المتوسط} = \text{أ.م} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} |ح_ر| \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر} \quad .....(3-13)$$

مثال (3-4): البيانات التالية تمثل اوزان مئة طالب مبوبة كما في الجدول (3-3)

فئات الاوزان	40-	45-	50-	55-	60-	65-	المجموع
عدد الطلاب	7	18	40	20	10	5	100

جدول (3-3)

والمطلوب ايجاد الانحراف المتوسط لهذه الاوزان

الحل: نكون الجدول (3-4) التالي الذي يشمل جميع البيانات اللازمة للحل.

فئات الاوزان	عدد الطلاب $ك_ر$	مركز الفئات $س_ر$	$س_ر \times ك_ر$	$\|ح_ر\| = \|س_ر - \bar{س}\|$	$\|ح_ر\|.ك_ر$
40-	7	42.5	297.5	12.16=|54.66-42.5|	85.12=7×12.16
45-	18	47.5	855.0	7.16=|54.66-47.5|	128.88=18×7.16
50-	40	52.5	2200	2.16=|54.66-52.5|	86.4=40×2.16
55-	20	57.5	1151	2.84=|54.66-57.5|	56.8=20×2.84
60-	10	62.5	625	7.84=|54.66-62.5|	78.4=10×7.84
70-65	5	67.5	337.5	12.84=|54.66-67.5|	64.2=5×12.84
المجموع	100		5466		499.8

جدول (3 – 4)

- نجد $\bar{س}$ من العلاقة

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر}$$

$$= \frac{5466}{100} = 54.66$$

- نجد الانحراف المتوسط من العلاقة

$$- \text{أم} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} |ح_ر| \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر} = \frac{499.8}{100} = 4.998$$

3-2 الانحراف المعياري.

تعريف الانحراف المعياري : هو الجذر التربيعي لمجموع مربعات الانحرافات عن وسطها الحسابي مقسوماً على حجم العينة.

ولايجاد الانحراف المعياري هناك حالتان

أ- اذا كانت البيانات غير مبوبة:

نتبع الخطوات التالية.

- نجد الوسط الحسابي لقيم المشاهدات من العلاقة.

$$\bar{س} = \frac{س_1 + س_2 + ... + س_ن}{ن}$$

- نجد انحرافات القيم عن الوسط الحسابي أي .

$$ح_1 = س_1 - \bar{س}$$

$$ح_2 = س_2 - \bar{س}$$

. . . . .

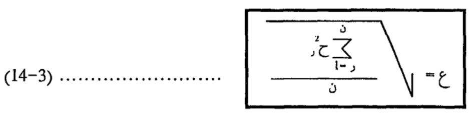
. . . . .

$$ح_ن = س_ن - \bar{س}$$

- نجد مربعات الانحرافات عن الوسط الحسابي أي.

$\text{ح}_1^2 ، \text{ح}_2^2 ، .... \text{ح}_{\text{ن}}^2$

- نجد الانحراف المعياري عن طريق العلاقة التالية.



$$\text{ع} = \sqrt{\frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ح}_{\text{ر}}^2}{\text{ن}}} \quad .... (14-3)$$

حيث ع تدل على الانحراف المعياري

اذا كان حجم العينة صغيراً فان

$$\text{ع} = \sqrt{\frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ح}_{\text{ر}}^2}{\text{ن} - 1}} \quad .... (15-3)$$

اذا كان حجم العينة كبيراً ويقترب من حجم المجتمع فإن

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ح}_{\text{ر}}^2}{\text{ن}}} \quad .... (16-3)$$

اذا كان حجم العينة مساويا لحجم المجتمع الصغير.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ح}_{\text{ر}}^2}{\text{ن} - 1}} \quad .... (17-3)$$

اذا كان حجم العينة مساويا لحجم المجتمع الكبير

والمقصود بحجم العينة او المجتمع صغيراً اذا كانت ن ≥ 30 ويكون كبيراً اذا كانت ن ≤ 30.

ملاحظة : إذا أخذنا مربع كلا الطرفين فإننا نحصل على مقياس آخر يسمى التباين ولكن غالبا ما يستعمل هو الانحراف المعياري.

مثال (3–5): اوجد الانحراف المعياري لقيم المشاهدات التالية 3،7،11،14،5.

الحل: لإيجاد الإنحراف المعياري نتبع الخطوات التالية :

- نجد $\overline{س} = \frac{5+14+11+7+3}{5} = \frac{40}{5} = 8$

- نجد الانحرافات ومربعاتها عن الوسط

$ح_1 = س_1 - \overline{س} = 3-8 = -5$ ، $ح_1^2 = 25$.

$ح_2 = س_2 - \overline{س} = 7-8 = -1$ ، $ح_2^2 = 1$

$ح_3 = س_3 - \overline{س} = 11-8 = +3$ ، $ح_3^2 = 9$

$ح_4 = س_4 - \overline{س} = 14-8 = 6$ ، $ح_4^2 = 36$

$ح_5 = س_5 - \overline{س} = 5-8 = -3$ ، $ح_5^2 = 9$

- نجد الانحراف المعياري من العلاقة.

$ع = \sqrt{\frac{25+1+9+36+9}{5}} = \sqrt{\frac{80}{5}} = \sqrt{16}$ وعليه

فيكون $ع = \sqrt{16} = 4$. أي أن الانحراف المعياري = 4

ب) اذا كانت البيانات المعطاة مبوبة:

هناك عدة طرق لايجاد الانحراف المعياري نذكر اهمها:

1) الطريقة المطولة

وفي هذه الطريقة نتبع الخطوات التالية :

- نجد مراكز الفئات للبيانات المبوبة.

- نجد الوسط الحسابي لهذه البيانات من العلاقة

$$\overline{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر}$$

نجد الانحرافات لقيم المشاهدات عن وسطها الحسابي

$ح_1 = س_1 - \overline{س}$

$ح_2 = س_2 - \overline{س}$

. . . . . .

. . . . . .

$ح_ن = س_ن - \overline{س}$

- نجد مربعات الانحرافات

$= ح_1^2 = \left(س_1 - \overline{س}\right)^2 ، ح_2^2 = \left(س_2 - \overline{س}\right)^2 ،.........، ح_ن^2 = \left(س_ن - \overline{س}\right)^2$

- نجد حاصل ضرب كل انحراف بالتكرار المقابل له أي نجد

$ح_1^2 ك_1 ، ح_2^2 ك_2 ، .... ، ح_ن^2 . ك_ن$

- نجد الانحراف المعياري من العلاقة

$$ع = \sqrt{\frac{ح_1^2 ك_1 + ح_2^2 ك_2 + ... + ح_ن^2 . ك_ن}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر}} \quad ....(18-3)$$

أو

$$ع = \sqrt{\frac{\left(س_1 - \overline{س}\right)^2 ك_1 + \left(س_2 - \overline{س}\right)^2 ك_2 + ... + \left(س_ن - \overline{س}\right) ك_ن}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر}} \quad ...(19-3)$$

ثم نقسم $\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر$ اذا كان حجم العينة صغيراً ، $\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر - 1$ اذا كان حجم العينة كبيراً

مثال (3–6): البيانات التالية تمثل رواتب مئة موظف في احدى الشركات مبوبة كما في الجدول (3–7).

فئات الرواتب	70–79	80–89	90–99	100–109	110–119	120–129	130–139	المجموع
عدد الموظفين	5	7	21	33	18	13	3	100

جدول (3–7)

والمطلوب ايجاد التباين وكذلك الانحراف المعياري لهذه المشاهدات

الحل: نكون الجدول (3–8) والمحتوي على كافة البيانات اللازمة للحل

فئات الرواتب	التكرار ك ر	مركز الفئات س ر	س ر.ك ر	ح ر=س ر- س̄	ح² ر	ح² ر.ك ر
70–79	5	74.5	372.5	ح1=74.5−104.8=30.3	918.09	4590.45
80–89	7	84.5	591.5	ح2=20.3	412.09	2884.63
90–99	21	94.5	1984.5	ح3=10.3	106.09	2227.89
100–109	33	104.5	3448.5	ح4=−0.3	0.09	0002.97
110–119	18	114.5	2061.0	ح5=9.7	94.09	1693.62
120–129	13	124.5	1618.5	ح6=19.7	388.09	5045.17
130–139	3	134.5	403.5	ح7=29.7	882.09	2646.27
	100		10480			19091.0

جدول (3–8)

نجد المتوسط الحسابي س̄ = $\frac{10480}{100} = 104.8$

نجد التباين من العلاقة

$$ع^2 = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \bar{س})^2 ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر} = \frac{19091}{100-1} = \frac{19091}{99}$$

$$ع^2 \approx 192.84$$

فيكون الانحراف المعياري بهذه الطريقة .

$$ع = \sqrt{ع^2} = \sqrt{192.84}$$

$$= 13.89$$

2) ايجاد الانحراف المعياري باستخدام الانحرافات البسيطة عن الوسط الفرضي.

لإيجاد الانحراف المعياري باستخدام الانحرافات عن الوسط الفرضي نتبع الخطوات التالية :

- نجد مراكز الفئات $س_ر$
- نأخذ احد مراكز الفئات الموجودة سابقاً كوسط فرضي وليكن (أ) غالبا ما يكون مركز الفئة المقابل للأكثر تكراراً.
- نجد $ح_ر = س_ر - أ$
- نجد $ح_ر \times ك_ر$ ثم نجد $\sum ح_ر \times ك_ر$
- نجد مربع $ح_ر$
- نجد مجموع حاصل ضرب $ح_ر^2 \times ك_ر$ أي $\sum ح_ر^2 \times ك_ر$

- نجد الانحراف المعياري من العلاقة.

$$ع = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن} ح_ر^2 \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر} - \left(\frac{\sum_{ر=1}^{ن} ح_ر \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر}\right)^2} \quad ....(20-3)$$

هذا اذا كان مجموع التكرارات اقل من او يساوي 30 مفردة يكون الانحراف المعياري اكثر دقة.

3- ايجاد الانحراف المعياري باستخدام الانحرافات البسيطة المختصرة عن الوسط الفرضي.

لإيجاد الانحراف المعياري نتبع الخطوات التالية :

- نجد مراكز الفئات $س_ر$.
- نجد الوسط الفرضي أ أحد مراكز الفئات.
- نجد الانحرافات عن الوسط الفرضي من العلاقة $ح_ر = س_ر - أ$

- نجد الانحرافات المختصرة $ح'_ر = \frac{ح_ر}{ل} = \frac{\text{الانحرافات البسيطة}}{\text{طول الفئة}}$ .... (21-3)

- نجد مجموع حاصل ضرب الانحرافات المختصرة× التكرارات
- نربع الانحرافات المختصرة ثم نجد مجموع حاصل ضرب مربع الانحرافات المختصرة× التكرارات أي

$$\sum ح'^2_ر \times ك_ر$$

- نجد الانحراف المعياري من العلاقة التالية:

$$ع = ل \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن} ح'^2_ر \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر} - \left(\frac{\sum_{ر=1}^{ن} ح'_ر \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر}\right)^2} \quad ....(22-3)$$

مثال(3–7): البيانات التالية تمثل علامات100 طالب من50 موزعة بالجدول (3–9).

فئات الدرجات	صفر-	10-	20-	30-	40-	المجموع
عدد الطلاب	2	5	27	47	19	100

جدول (3–9)

المطلوب ايجاد

1) الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات البسيطة عن الوسط الفرضي.

2) الانحراف المعياري عن طريق الانحرافات المختصرة عن الوسط الفرضي.

الحل: نكون جدول يشمل البيانات المطلوبة وهو جدول (3–10)

فئات العلامات	التكرار $ك_ر$	مراكز الفئات $س_ر$	$ح_ر$	$ح^2_ر$	$ح_ر.ك_ر$	$ح^2_ر.ك_ر$	$\acute{ح}_ر$	$\acute{ح}_ر.ك_ر$	$\acute{ح}^2_ر$	$\acute{ح}^2_ر \times ك_ر$
صفر-	2	5	-20	400	-40	800	-2	-4	4	8
10-	5	15	-10	100	-50	500	-1	-5	1	5
20-	27	25	∴	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
30-	47	35	10	100	470	4700	1	47	1	47
40-	19	45	20	400	380	7600	2	38	4	76
المجموع	100				760	13600		76		136

جدول (3–10)

1- نبدأ بحل المطلوب الاول.

- نحدد الوسط الفرضي وليكن أ = 25 أحد مراكز الفئات.
- نجد انحراف مراكز الفئات عن الوسط الفرضي.
- نجد مربع الانحرافات عن الوسط الفرضي.

- نجد مجموع حاصل ضرب مربع الانحرافات في التكرارات = 13600

- نجد مجموع حاصل ضرب الانحرافات في التكرارات= 760

نجد الانحراف المعياري من العلاقة:

$$ع = \sqrt{\frac{13600}{99} - \left(\frac{760}{99}\right)^2}$$

$$= \sqrt{137.37 - 58.9} = \sqrt{78.47} = 8.86$$

2) الحل بطريقة الانحرافات المختصرة.

- تتبع الخطوات السابقة حتى ايجاد الانحرافات.

- نجد الانحرافات المختصرة من العلاقة.

$حَ_ر = \frac{ح_ر}{ل}$ حيث ل : طول الفئة.

- نجد $حَ^2_ر$.

- نجد حاصل ضرب $حَ_ر ك_ر$ = 76

- نجد مجموع حاصل ضرب $حَ^2_ر . ك_ر$ 136

- نجد الانحراف المعياري.

$$ع \quad = ل \sqrt{\frac{136}{99} - \left(\frac{76}{99}\right)^2}$$

$$= 10\sqrt{1.37 - 0.59} = 10\sqrt{0.78}$$

$$= 10 \times 0.883 = 8.83$$

نلاحظ ان النتيجتين متشابهتين في القيمة.

3-3-3: أثر التحويلات الخطية على التباين والانحراف المعياري

نظرية: اذا اخضع الانحراف المعياري ع، التباين $ع^2$ للتحويل الخطي ق(س)= أس+ب

فان الانحراف المعياري والتباين يتأثران بهذا التحويل ويصبح كل منهما كما في العلاقتين.

$$ع_{ص} = |أ| . ع_{س} \quad ....(25-3)$$

حيث ع ص قيمة الانحراف المعياري بعد التأثير.

$$ع^2_{ص} = أ^2 . ع^2_{س} \quad ....(26-3)$$

حيث $ع^2$ص: قيمة التباين بعد التأثر

مثال (3-8): اذا كان الانحراف المعياري لقيم المشاهدات =4 وتباينها 16 خضعت لتحويل خطي حسب المعادلة.

ص = 0.3 س + 7

المطلوب: حساب الانحراف المعياري والتباين بعد التعديل

الحل: نجد الانحراف المعياري من العلاقة

ع ص = |أ| . ع س.

$= 0.23 \times 4 + 7 = 1.2 + 7 = 8.2$

التباين بعد التعديل حسب العلاقة التالية

$ع^2_{ص} = (0.7)^2 \times 16$

$= 0.49 \times 16$

$= 7.84$

هناك طرق اخرى لايجاد الانحراف المعياري لقيم المشاهدات غير المبوبة

$$ع = \sqrt{\frac{\sum س_ر^2}{ن} - \left(\frac{\sum س_ر}{ن}\right)^2} \quad ....(29-3)$$

مثال (3–9): أوجد الانحراف المعياري لقيم المشاهدات التالية

8، 12 ، 10، 5 ، 15

الحل: نكون جدول الحل (3 – 11)

$س_ر$	$س_ر^2$
8	64
12	144
10	100
5	25
15	225
50	558

جدول (3 – 11)

$$ع^2 = \frac{558}{5} - \left(\frac{50}{5}\right)^2 = 111.6 - 100 = 11.6$$

$$\therefore \text{الانحراف المعياري } ع = \sqrt{11.6} = 3.41$$

مثال (3–11) : البيانات التالية تمثل الاجر الاسبوعي لمائة عامل مبينة كما يلي:

الفئة	20–	40–	60–	80–	100–120
التكرار	8	12	45	20	15

والمطلوب : ايجاد الانحراف المعياري بطرقه المختلفة

الحل: نكون جدول الحل (3-12)

فئات	مراكز الفئات	التكرار	$س_ر ك_ر$	$س_ر - \bar{س}$	$(س - \bar{س})^2$	$(س_ر - \bar{س})^2 ك_ر$	$س^2$	$س^2_ر ك_ر$	$ح_ر$	$ح_ر ك_ر$	$ح^2_ر$	$ح^2_ر ك_ر$
20-	30	8	240	44.4-	1971.36	15770.88	900	7200	40-	320-	1600	12800
40-	50	12	600	24.4-	595.36	7144.32	2500	30000	20-	240-	400	4800
60-	70	45	3150	4.4-	19.36	871.2	4900	320500	∴	∴	∴	∴
80-	90	20	1800	15.6	243.36	4867.2	8100	162000	20	400	400	8000
100-120	110	15	1650	35.6	1267.36	19010.4	12100	181500	40	600	1600	24000
		100	7440			47664		601200		440		49600

جدول (3 – 12)

الطريقة الأولى : الانحرافات البسيطة عن الوسط الحسابي.

نجد أولاً:

$$\bar{س} = \frac{7440}{100} = 74.4$$

$$ع^2 = \frac{47664}{100} = 476.64 \quad \text{التباين}$$

$$ع = \sqrt{476.64} = 21.83 \quad \text{الانحراف المعياري}$$

طريقة ثانية: باستخدام العلاقة $ع^2 = \frac{\sum س^2_ر ك_ر}{ك_ر} - \left(\frac{\sum س_ر ك_ر}{ك_ر}\right)^2$

$$ع^2 = \frac{601200}{100} - \left(\frac{7440}{100}\right)^2 = 6012 - 5535.36 = 476.64 \quad \text{التباين}$$

ع = 21.83 الانحراف المعياري $ع^2 = \frac{\sum ح_ر^2 ك_ر}{\sum ك_ر} - \left(\frac{\sum س_ر ك_ر}{\sum ك_ر}\right)^2$

طريقة ثالثة : باستخدام العلاقة

$$ع^2 = \frac{49600}{100} - \left(\frac{440}{100}\right)^2 = 496 - 19.36 = 476.64$$

الانحراف المعياري $ع = \sqrt{476.64}$

$= 21.83$

3-3-4 التباين التجميعي: (Poaled Variance) والانحراف التجمعي

لو أخذنا من مجتمعات عددها (ن) عينات ذوات الحجوم ($ن_1$، $ن_2$......، $ن_ن$) ومن هذه العينات حسبنا ($\bar{س}_1$، $\bar{س}_2$، ....، $\bar{س}_ن$) و ($ع_1^2$، $ع_2^2$، ....$ع_ن^2$) فان متوسط متوسطات العينات المرجحة بحجم العينة:

$$\mu = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ن_ر \bar{س}_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ن_ر} \quad \text{.............................(30-3)}$$

$$\mu = \frac{ن_1\bar{س}_1 + ن_2\bar{س}_2 + ... + ن_ن\bar{س}_ن}{ن_1 + ن_2 + ... + ن_ن} \quad \text{....................(31-3)}$$

حيث : $ن_ر \bar{س}_ر$: مجموع القيم.

$ن_ر$: عدد القيم

ومنه فإن:-

$$\text{ع}_{\text{ت}} = \sigma = \sqrt{\frac{\sum (\text{ن}_{\text{ر}}-1)\text{ع}_{\text{ر}}^2 + \text{ن}_{\text{ر}}(\bar{\text{س}}_{\text{ر}}-\mu)^2}{\sum (\text{ن}_{\text{ر}}-1)}} \qquad (32-3)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (\text{ن}_{\text{ر}}-1)\text{ع}_{\text{ر}}^2 + \text{ن}_{\text{ر}}(\bar{\text{س}}_{\text{ر}}-\mu)^2}{\sum (\text{ن}_{\text{ر}}-\text{ك})}} \qquad (33-3)$$

حيث ك يمثل عدد العينات.

مثال (3-12) : اذا كانت لدينا العينات التالية كما في جدول (3-13):-

	I	II	III
ن	100	300	200
$\bar{\text{س}}$	65	55	60
ع^2	49	81	64

جدول (3-13)

المطلوب : (1) إيجاد الوسط التجميعي μ.

(2) الانحراف المعياري التجميعي.

الحل : بتطبيق العلاقة أعلاه.

$$\mu = \frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ن}_{\text{ر}}\bar{\text{س}}_{\text{ر}}}{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ن}_{\text{ر}}}$$

$$= \frac{200 \times 60 + 300 \times 55 + 100 \times 65}{600} = \frac{35000}{600} = 58.3$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن} (ن_ر - 1) ع_ر^2 + ن_ر (\overline{س}_ر - \mu)^2}{\sum_{ر=1}^{ن} (ن_ر - ك)}}$$

$$= \sqrt{\frac{49(99) + (299)(81) + (64)(199) + 4444.4 + 3333.3 + 6422.2}{600 - 3}}$$

$$= \sqrt{\frac{56006}{597}} = 93.81 = 9.69$$ أما التباين التجميعي فهو 93.81

عدد درجات الحرية= عدد القيم المستقلة= ن−1

(3−34)........

$\overline{س}$ يحدد قيمة واحدة من القيم ، والقيم الباقية تكون مستقلة.

الوحدة الرابعة

العزوم والتفرطح والالتواء

4-1 : العزوم :

واستخدم العلماء مبدأ العزوم (Momenis) للاستدلال على الالتواء، والعزم درجات، مما يقودنا لتعريف العز م الواوي بالعلاقة:

$$م_و = \sum (س_ر - أ)^و د(س_ر) \qquad \text{(4-1)}$$

ويسمى ($م_و$) بالعزم الواوي حول الثابت (أ) وقد يكون هذا الثابت:-

1) أ= صفرا. وتسمى بذلك العزوم حول الصفر ويرمز لها بالرمز ($\bar{م}_و$). فإذا كانت

و=1 ← $$\bar{م}_1 = \sum س_ر د(س_ر) = \bar{س} \qquad \text{(4-2)}$$

$$\bar{م}_1 = \sum س_ر د(س_ر) = \bar{س}$$

و = 2 ← $م'_2 = \sum س_ر^2 د(س_ر) = ت(س^2)$

$$م'_2 = \sum س_ر^2 د(س_ر) = ت(س^2) \qquad \text{(4-3)}$$

و=3 ← $\bar{م}_3 = \sum س_ر^3 د(س_ر)$

$$\bar{م}_3 = \sum س_ر^3 د(س_ر) \qquad \text{(4-4)}$$

و = 4 ← $م'_4 = \sum س_ر^4 د(س_ر)$

$$م'_4 = \sum س_ر^4 د(س_ر) \quad \text{..............(5-4)}$$

2) أما إذا كـان الثابت أ هـو الوسـط الحسـابي نسـمي ذلـك العـزوم حـول الوسـط الحسابي ويرمز لها بالرمز ($م_ر$) . وتصبح العلاقة:

$$م_ر = \sum \left(س_ر - \bar{س}\right)^ر د(س_ر) \quad \text{..............(6-4)}$$

و=1 ← $م_1 = \sum (س_ر - \bar{س}) د(س_ر) =$ صفر

$$م_1 = \sum \left(س_ر - \bar{س}\right) د(س_ر) = \text{صفر} \quad \text{..............(7-4)}$$

و=2 ← $م_2 = \sum \left(س_ر - \bar{س}\right)^2 د(س_ر)$

$$م_2 = \sum \left(س_ر - \bar{س}\right)^2 د(س_ر) = ع^2 \quad \text{..............(8-4)}$$

و=3 ← $م_3 = \sum \left(س_ر - \bar{س}\right)^3 د(س_ر)$

$$م_3 = \sum \left(س_ر - \bar{س}\right)^3 د(س_ر) \quad \text{..............(9-4)}$$

و=4 ← $م_4 = \sum \left(س_ر - \bar{س}\right)^4 د(س_ر)$

$$م_4 = \sum \left(س_ر - \bar{س}\right)^4 د(س_ر) \quad \text{..............(10-4)}$$

وتستخدم هذه العزوم للتعبير عن ($\bar{س}$) ، ($ت^2$)، $ع^2$.

وبذلك فاننا نسـتطيع التعبـير عـن المعادلـة السـابقة $ع^2 = ت^2 - \bar{س}^2$ بدلالـة العـزوم حيث أن: $ع^2 = م_2$ ، $ت^2 = مَ_2$، $\bar{س} = مَ_1$، وبالتعويض في العلاقة نحصل على:

$$ع^2 = مَ_2 - مَ_1 \quad \text{أو}$$

$$\Leftarrow م_2 = مَ_2 - مَ_1 \quad \text{.....................(11-4)}$$

ويمكننا أيضا ايجاد قيمة ($م_3$) بنفس الطريقة:

$$م_3 = \frac{1}{ن} \sum \left(س_ر - \bar{س}\right)^3$$

$$= \frac{1}{ن} \sum \left(س_ر^3 - 3س_ر^2\bar{س} + 3س_ر\bar{س}^2 - \bar{س}^3\right)$$

$$= \frac{1}{ن}\left[\sum س_ر^3 - 3\bar{س}\left(\sum س_ر^2\right) + 3\bar{س}^2\left(\sum س_ر\right) - \sum \bar{س}^3\right]$$

$$= \frac{1}{ن}\left[س_ر^3 - 3\left(\frac{\left(\sum س_ر\right)}{ن}\right)\left(\sum س_ر^2\right) + 3\left(\frac{\left(\sum س_ر\right)}{ن}\right)^2\left(\sum س_ر\right) - ن\left(\frac{\sum س_ر}{ن}\right)^3\right]$$

$$= \frac{\sum س_ر^3}{ن} - 3\left(\frac{\left(\sum س_ر\right)}{ن}\right)\left(\frac{\sum س_ر^2}{ن}\right) + 3\left(\frac{\left(\sum س_ر\right)}{ن}\right)^3 - \left(\frac{\left(\sum س_ر\right)}{ن}\right)^3$$

$$\boxed{م_3 = مَ_3 - 3\,مَ_1 \times مَ_2 + 2\,مَ_1^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12-4)$$

ويمكننا ايضا ايجاد ($م_4$) وبنفس الطريقة

$$م_4 = \frac{1}{ن} \sum \left(س_ر - \bar{س}\right)^4$$

$$= \frac{1}{ن} \sum \left(س^4 - 4س_ر^3\bar{س} + 6س_ر^2\bar{س}^2 + 4س_ر\bar{س}^3 - \bar{س}^4\right)$$

$$= \frac{1}{ن}\left[\sum \left(س_ر^2\right) - 4\bar{س}\sum\left(س_ر^3\right) + 6\bar{س}^2\left(\sum س_ر^2\right) - 4\bar{س}^3\left(\sum س_ر\right) + ن\,\bar{س}^4\right]$$

$$= \frac{1}{ن}\left[\sum س_ر^2 - 4\left(\frac{\left(\sum س_ر\right)}{ن}\right)\left(\sum س_ر^3\right) + 6\left(\frac{\left(\sum س_ر\right)}{ن}\right)^2\left(\sum س_ر^2\right) - 4\left(\frac{\left(\sum س\right)}{ن}\right)\left(\sum س_ر\right) + ن\left(\frac{\sum س_ر}{ن}\right)^4\right]$$

$$= \frac{\sum س_ر^2}{ن} = 4\left(\frac{\left(\sum س_ر\right)}{ن}\right)\left(\frac{\sum س_ر^3}{ن}\right) + 6\left(\frac{\left(\sum س_ر\right)}{ن}\right)^2\left(\frac{\sum س_ر^2}{ن}\right) - 4\left(\frac{\left(\sum س_ر\right)}{ن}\right)^2 + \left(\frac{\left(\sum س_ر^4\right)}{ن}\right)$$

$$\acute{\text{م}}_4 - 4\,\acute{\text{م}}_3\,\acute{\text{م}}_1 + 6\,\acute{\text{م}}_2 \times \acute{\text{م}}_1^2 - 3\,\acute{\text{م}}_1^4 \quad \text{......................... (13-4)}$$

$$\text{م}_4 = \acute{\text{م}}_4 - 4\,\acute{\text{م}}_3\,\acute{\text{م}}_1 + 6\,\acute{\text{م}}_2 \times \acute{\text{م}}_1^2 - 3\,\acute{\text{م}}_1^4 \quad \text{......................... (14-4)}$$

وقد خلص العلماء من خـلال ابحـاث كثير في العـزوم الى إيجـاد معـامل سمـي بمعـامل التفرطح والذي سنرمز له بالرمز α_2 .

2-4 معامل التفرطح:

يمكن قياس تفرطح منحنى معين من خلال معامل سمي بمعامل التفرطـح والـذي يمكـن ايجاده من خلال العلاقة التالية:

$$\alpha_2 = \frac{\text{م}_4}{\text{م}_2^2} \quad \text{......................... 15-4)}$$

فاذا كان:-

$(\alpha_2) = 3$ ⇐ المنحنى معتدل التفرطح

$(\alpha_2) > 3$ ⇐ المنحنى مفرطح

$(\alpha_2) < 3$ ⇐ المنحنى مدبب

وكمثال على اتفرطح فإن التوزيع الطبيعي له منحنى معتدل التفرطح لأن $\alpha_3 = 3$

4-3) الالتواء (SKEWNES)

تعريف: وهو انتفاء التماثل، ومن الناحية الاحصائيـة هـو عـدم وجـود تمـاثل، ويمكـن قياسها عن طريق (سَ ، و، م).

حيث :-

$\bar{\text{س}} - \text{م} < \therefore$ ⇐ الالتواء سالب.

$\bar{\text{س}} - \text{م} > \therefore$ ⇐ الالتواء موجب.

ومقياس الالتواء هذا يسمى بمعامل الالتواء وهو قيمة نسبية غير متأثرة بوحدات القياس.

ويمكن حساب معامل الالتواء عن طريق:-

1) الوسط الحسابي ($\bar{\text{س}}$) والوسيط (و) والمنوال (م)

⇐ يعطينا معامل بيرسون الأول .

$$\alpha_1 = \frac{\bar{\text{س}} - \text{م}}{\text{ع}} \qquad (16-4)$$

$$\alpha_1 = \frac{3(\bar{\text{س}} - \text{و})}{\text{ع}} \qquad (17-4)$$

$$\alpha_1 = \frac{3(\text{و} - \text{م})}{2\text{ع}} \qquad (18-4)$$

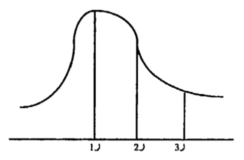
وهذه صور مختلفة من معامل بيرسون الأول

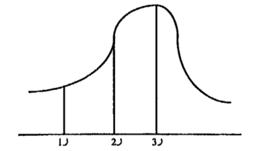
2) باستخدام الربيعات (ر_1) ، (ر_2) ، (ر_3)

⇐ يعطينا معامل بيرسون الثاني

$$\alpha_2 = \frac{(\text{ر}_3 - \text{ر}_2) - (\text{ر}_2 - \text{ر}_1)}{\text{ر}_3 - \text{ر}_1} \qquad (19-4)$$

$$\alpha_2 = \frac{\text{ر}_3 - 2\text{ر}_2 + \text{ر}_1}{\text{ر}_3 - \text{ر}_1} \qquad (20-4)$$





$ر_3 - ر_2 > ر_2 - ر_1$

⇐ الالتواء موجب.

$ر_3 - ر_2 < ر_2 - ر_1$

الالتواء سالب.

مثال (4−1): جد معامل الالتواء بطرقه المختلفة لفئات الأجر التالية:

فئات الأجر	40-	60-	80-	100-	120-	المجموع
ت	8	12	20	8	2	50

علماً بأن:

$\bar{س} = 83.6$، $و = 85$، $م = 88$، $ر_1 = 67.5$، $ر_2 = و = 85$، $ر_3 = 97.5$، $ع = 20.95$

$$\alpha_1 = \frac{\bar{س} - م}{ع} = \frac{88 - 83.6}{20.95} = 0.21-$$

$$\alpha_1 = \frac{3(\bar{س} - و)}{ع} = \frac{(85 - 83.6)3}{20.95} = 0.21-$$

$$\alpha_1 = \frac{3(و - م)}{2ع} = \frac{(88 - 85)3}{(20.95)2} = 0.22-$$

$$\alpha_2 = \frac{ر_3 - 2ر_2 + ر_1}{ر_3 - ر_1} = \frac{67.5 + (85)2 - 97.5}{67.5 - 97.5} = \frac{170 - 165}{30} = 0.2-$$

حيث يأخذ α_1 اشارة ($م_3$) فاذا كانت :-

(α_1)=.∴. ⇐ التوزيع متماثل

$(\alpha_1) > .. \Leftarrow$ الالتواء سالب

$(\alpha_1) < .. \Leftarrow$ الالتواء موجب

حيث α_1 ترمز الى معامل الالتواء

هناك طريقة أخرى لإيجاد معامل الالتواء خلص إليهـا العلمـاء باسـتخدام العـزوم بـأن أوجدوا معامل التواء α_1 من العلاقة:

$$\alpha_1 = \frac{م_3^2}{م_2^3} \quad \text{.........................(21-4)}$$

والآن نورد مثالاً شاملاً لذلك.

مثال (4-2): البيانات التالية تمثل فئات الاجر الاسبوعي لـ 50 عامل مبينة كما يلي:

فئات الاجر	40-	60-	80-	100-	120-140
التكرار	8	12	20	8	2

المطلوب : 1) ايجاد العزم الاول والثاني والثالث والرابع حول $\bar{س}$

2) ايجاد العزم الاول والثاني والثالث والرابع حول الصفر

3) معامل التفرطح ونوعه.

4) معامل الالتواء ونوعه.

الحل: نكون جدول الحل التالي.

الفئات	$ك_ر$	$س_ر$	$س_ر^2$	$س_ر^3$	$س_ر^4$
40-	8	50	2500	125000	6250000
60-	12	70	4900	343000	24010000
80-	20	90	8100	729000	65610000
100-	8	110	12100	1331000	146410000
120-	2	130	16900	2197000	285610000
المجموع	50				

فئات	ك$_ر$	س$_ر$	س$_ر$ ك$_ر$	س$_ر^2$ ك$_ر$	س$_ر^3$ ك$_ر$	س$_ر^4$ ك$_ر$
40-	8	50	400	20000	1000000	50000000
60-	12	70	840	58800	4116000	288120000
80-	20	90	1800	162000	14580000	1312200000
100-	8	110	880	96800	10648000	1171280000
120-	2	130	260	33800	4394000	571220000
المجموع	50	-	4180	371400	34738000	3392820000

ح$_ر$	ح$_ر$ ك$_ر$	ح$_ر^2$ ك$_ر$	ح$_ر^3$ ك$_ر$	ح$_ر^4$ ك$_ر$	ح$'_ر$	ح$'_ر$ ك$_ر$
40-	320-	12800	512000-	20840000	2-	16-
20-	240-	4800	96000-	1920000	1-	12-
0	0	0	0	0	0	0
20	160	3200	64000	1280000	1	8
40	80	3200	128000	5120000	2	4
	320-	24000	416000	29160000	/	16-

ح$'^2_ر$ ك$_ر$	ح$'^3_ر$ ك$_ر$	ح$'^4_ر$ ك$_ر$	(س$_ر$ − $\bar{س}$) ك$_ر$	(س$_ر$ − $\bar{س}$)^2 ك$_ر$	(س$_ر$ − $\bar{س}$)^3 ك$_ر$	(س$_ر$ − $\bar{س}$)^4 ك$_ر$
32	64	128	−268.8	9031.68	303464.448	10196405.45
12	12-	12	−163.2	.2219	30185.472	410522.4192
0	0	0	128	819.2	5242.88	33554.432
8	8	8	211.2	5575.68	147197.952	3886025.933
8	16	32	212.8	4305.92	199794.688	9270473.523
60	52-	180		21952	685885.44	23796981.76

$$(1)\ م'_1 = \frac{1}{\sum ك_ر} \sum س_ر ك_ر = \frac{4180}{50} = 83.6$$

$$(2)\ م'_2 = \frac{1}{\sum ك_ر} \sum س^2_ر ك_ر = \frac{371400}{50} = 7428$$

$$(3)\ م'_3 = \frac{1}{\sum ك_ر} \sum س^3_ر ك_ر = \frac{34738000}{50} = 69476$$

$$(4)\ م'_ر = \frac{1}{\sum ك_ر} \sum س^4_ر ك_ر = \frac{3392820000}{50} = 67856400$$

$$(5)\ م'_1 = \frac{1}{\sum ك_ر} \sum ح_ر ك_ر = \frac{-320}{50} + 90 = 83.6$$

$$(6)\ م'_2 = \frac{1}{\sum ك_ر} \sum ح^2_ر ك_ر = \frac{204000}{50} = 480$$

$$(7)\ م'_3 = \frac{1}{\sum ك_ر} \sum ح^3_ر ك_ر = \frac{-416000}{50} = -8320$$

$$(8)\ م'_4 = \frac{1}{\sum ك_ر} \sum ح^4_ر ك_ر \quad \frac{29160000}{50} = 583200$$

العزوم حول نقطة الأصل:

$$(9)\ \bar{م}_1 = \frac{1}{\sum ك_ر} \sum س_ر ك_ر \quad \frac{-16}{50} = -..32$$

$$(10)\ \bar{م}_2 = \frac{1}{\sum ك_ر} \sum س^2_ر ك_ر = \frac{60}{50} = 1.2$$

$$(11\ \bar{م}_3 = \frac{1}{\sum ك_ر} \sum س^3_ر ك_ر = \frac{-52}{50} = -1.04$$

$$(12)\ \bar{م}_4 = \frac{1}{\sum ك_ر} \sum س^4_ر ك_ر = \frac{180}{50} = 3.6$$

العزوم حول الوسط الحسابي.

$$(13)\ م_1 = \frac{1}{\sum ك_ر} \sum (س_ر - \overline{س}) ك_ر = .·.$$

$$(14)\ م_2 = \frac{1}{\sum ك_ر} \sum (س_ر - \overline{س})^2 ك_ر = \frac{21952}{50} = 439.04$$

$$(15)\ م_3 = \frac{1}{\sum ك_ر} \sum (س_ر - \overline{س})^3 ك_ر = \frac{685885.44}{50} = 13717.7088$$

$$(16)\ م_4 = \frac{1}{\sum ك} \sum (س_ر - \overline{س})^3 ك = \frac{23796981.76}{50} = 475939.6352$$

وعليه فان معامل الالتواء باستخدام العزوم

$$\alpha_1 = \frac{م_3^2}{م_2^3} = \frac{(13717.7088)^2}{(439.04)^3} = \frac{8 \times 1.8817551}{8462748} = 2\ 0 >$$ وهـذا يعـني أن المنحنـى ملتوٍ نحو اليمين

$$\alpha_2 = \frac{م_4}{م_2^2} = \frac{475939.635}{(439.04)^2} = \frac{475939.635}{192756.12} = 2.47 > 3$$

وهذا يعني ان المنحنى مفرطح

الوحدة الخامسة

التوزيع الطبيعي

1-5 : شكل المنحنى الطبيعي وخصائصه

1-1-5 شكل المنحنى الطبيعي

يتخذ المنحنى الطبيعي شكل الجرس ، وهو متماثل حول نقطة الوسط أي ان العمود النازل من اعلى نقطة في المحنى على المحور الافقي يقسم المنحنى إلى منطقتين متساويتين كما هو موضح بالشكل (5-1) جانبا وهو يمثل التوزيع الطبيعي.

وهومن اهم التوزيعات الاحتمالية ودالته الاحتمالية:

$$ح(س) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} . هـ^{-\frac{1}{2}\left(\frac{س_ر-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad .... (1-5)$$

حيث: π النسبة التقريبية = $\frac{22}{7}$ أو 3.14

σ: الانحراف المعياري للتوزيع الطبيعي

هـ : العدد النيبري = 2.718

μ: الوسط الحسابي للتوزيع

$س_ر$: قيمة المشاهدة

شكل (5-1)



2-1-5 : خصائص التوزيع الطبيعي

1) شكله يشبه الجرس

2) متماثل حول الوسط.

3) الوسط الحسابي = الوسيط= المنوال لهذا التوزيع

4) المساحة تحت المنحنى الطبيعي=1

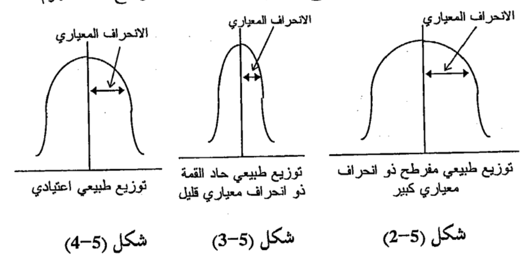
5) تحديد نسبة أي جزء محصور بين قيمتين تحت المنحنى يتم بمعرفة الوسط والانحراف المعياري للتوزيع.

6) تقل قيمة ي كلما اتجهت س نحو ∞ ولكنها لا يمكن ان تصبح صفرا الا في اللانهاية وهذا غير ملموس.

2-5 : التوزيع الطبيعي المعياري :

وحتى يكون التوزيع الطبيعي توزيعا معياريا فيتوجب ان يكون متوسطه الحسابي صفرا وتباينه 1. لذا فان خواص التوزيع الطبيعي المعياري هي نفس خواص التوزيع الطبيعي الاصلي اللهم الا زيادة الشرط الاخير وهو ان يكون وسطه الحسابي = صفرا. وتباينه يساوي 1.

وهناك صور اخرى لمنحنى التوزيع الطبيعي تعتمد على الانحراف المعياري للتوزيع. فكلما زاد الانحراف المعياري معنى ذلك انه الزيادة في تشتت البيانات عن وسطها الحسابي ولذا يزداد تفرطح المنحنى والاشكال التالية توضح هذا المفهوم:



شكل (5-2) شكل (5-3) شكل (5-4)

5-2-1 جداول التوزيع الطبيعي المعياري والمساحات :

1) صممت هذه الجداول لتعمل على تخفيف عناء ايجاد مساحة معينة تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري.

2) المساهمة في ايجاد احتمال اية مشاهدة من مشاهدات التوزيع الطبيعي غير المعياري وذلك بتحويل قيم المشاهدات الى درجات معيارية من العلاقة.

$$ى_ر = \frac{س_ر - \overline{س}}{ع_س} \quad ....(5-2)$$

حيث $س_ر$ قيمة المشاهدة، $\overline{س}$ الوسط الحسابي للعينة، $ع_س$: الانحراف المعياري للعينة.

3) يجب معرفة ان قيم $ى_ر$ للدرجات المعيارية واقعة بين $-4 \leq ى_ر \leq 4$ واية قيمة معيارية تزيد عن هذا الحد فيكون هناك خطأ حسابياً.

5-2-2 كيفية ايجاد المساحة تحت المنحنى باستخدام الجداول :

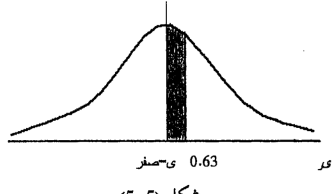
نتبع الخطوات التالية :

1)نحول كل قيمة مشاهدة من التوزيع الطبيعي الى قيمة معيارية حسب العلاقة(5-2)

2) بعد الحصول على القيمة المعيارية نلجأ الى جدول التوزيع الطبيعي المعياري لايجاد القيم المقابلة حيث ان العمود الاول يمثل القيم المعيارية والافقي يثمل الجزيئات للقيم المعيارية وبعد القراءة الرأسية الى اسفل ثم افقي نجد القيم المناظرة المطلوبة والتي تدل على المساحة، والاحتمال المطلوب حيث أن المساحة هي بمثابة احتمال.

والجدول ادناه يمثل جزءا من الجدول الكلي ولو اردنا ايجاد القيمة المناظرة لـ ى=0.63 نقرأ رقم تقاطع القيمة الرأسية مع الافقية فتكون هي القيمة المناظرة ل ى= 0.63 ونلاحظ ان القراءة تشير الى 0.2357 وهذا يشير الى احتمال وقوع المشاهدة المناظرة ل $ى_ر$. وهي تمثل المساحة المشار لها في الشكل التالي ونلاحظ من الشكل (5-5) ان الخط المار بنقطة ى= صفر يقسم المساحة الكلية الى قسمين متساويين كل منهما 0.5000 وعند حساب مساحة تبدأ بالصفر. وتنتهي بقيمة ى فان المساحة المطلوبة

هي القيمة المأخوذة من الجدول ادناه كما اسلفنا في المثال السابق.



شكل (5-5)

اما اذا تصادف وجود قيمة معيارية سالبة فاننا نأخذ مثيلتها الموجبة ونجدها من الجدول باستخدام خاصية التماثل المحوري:

حيث ان الجدول صمم فقط للقيم المعيارية الموجبة. والمساحة المحصورة عادة تحددها معطيات السؤال. والجدول التالي هو نموذج للجدول الطبيعي المعياري.

ى	,00	,01	,0200	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	,0000	,0040	,0080	,0120	,0160	,0199	,0229	,0279	,0319	,0359
0,1	,0398	,0438	,0517	,0557	,0596	,0636	,0675	,0714	,0753	
0,2	,0793	,0832	,0871	,0910	,0948	,0987	,1026	,1064	,1103	,1141
0,3	,1197	,1217	,1255	,1293	,1321	,1368	,1406	,1443		,1517
0,4	,1554	,1591	,1628	,1664	,1700	,1736	,1773	,1808	,1879	
0,5	,1915	,150	,1985	,2019	,2054	,2088	,2123	,2157		,2224
0,6	,2257	,2291	,2324	,2357	,2389	,2422	,2454	,2486	,2517	,2549

5-2-3 : تطبيقات على حساب المساحات أو الاحتمالات :

يمكن اعطاء الأمثلة التالية لتغطي جميع ما ورد من ملاحظات:

مثال (5-1): أوجد الاحتمال لما يلي (مساحة المناطق المحددة بالقيم المعيارية)

أ) ح (ى > -1) ب) ح (ى > 1)

جـ) ح (0 < ى < 2.3)　　　　د) ح (-1.35 < ى < 2.38)

هـ) ح (1.42 < ى < 3.1)

الحل: نبدأ بحل مثل هذه الأسئلة برسوم توضيحية للمنحنيات لتحديد المساحة المطلوبة ثم ايجادها من الجداول المعطاة

أ) ح (ى < -1) = 0.5000 - 0.3413 = 0.1587

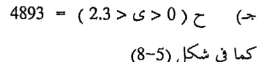
= مساحة نصف المنحنى - المساحة الواقعة تحت ى = -1 وهنا نأخذ مثيلتها من الجدول المعطى كما في شكل (5-6)

شكل (5-6)
1-

شكل (5-7)
1+

ب) ح (ى > 1) = 0.5000 - 0.3413 = 0.1587

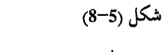
كما في شكل (5-7)



جـ) ح (0 < ى < 2.3) = 4893

كما في شكل (5-8)

2.3



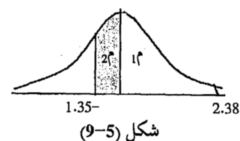
شكل (5-8)

د) ح (-1.35 < ى < 2.38)

= م1 + م2

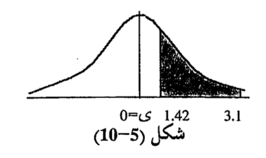
= 0.4115 + 0.4913 = 0.9028

كما في شكل (5-9)



شكل (5-9)

هـ) إذا أوقعت المنطقة المطلوبة في جهة واحدة فتأخذ الفارق بين المساحتين كما في شكل (5-10). وعليه تصبح المساحة المطلوبة المحددة على النحو:



شكل (5-10)

$$ح\,(1.42 < ى < 3.1) = 0.4990 - 0.4222 = 0.0768$$

مثال (5-2): تقدم عشرون الف طالب لامتحان عام وكان توزيع علاماتهم قريبا من التوزيع الطبيعي، فاذا كان الوسط الحسابي للعلامات 70 والانحراف المعياري 5، فأوجد :-

1) عدد الطلاب الذين تقع علاماتهم بين 70 - 80 درجة
2) عدد الطلاب الذين تقع علاماتهم بين 65- 75 درجة
3) عدد الطلاب الذين تقل علاماتهم عن 60
4) عدد الطلاب الذين تزيد علاماتهم عن 80
5) عدد الطلاب الذين تزيد علاماتهم عن 60
6) عدد الطلاب الذين تقل علاماتهم عن 80 مع من تزيد او تساوي 80

الحل: 1) تحول القيمة العادية إلى قيمة معيارية باستخدام العلاقة (5-2)

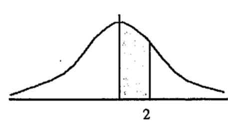
$$ح\left(\frac{70-70}{5} < ى < \frac{80-70}{5}\right)$$

$$= ح\left(0 < ى < \frac{10}{5}\right) = ح(0 < ى < 2)$$

نأخذ هذه القيمة.

$$= 0.4773$$

وعليه فإن عدد الطلاب المطلوب.



شكل (5-11)

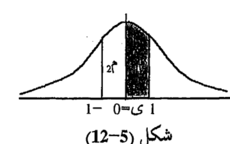
عدد الطلاب= 0.4773× 20000= 9546 طالبا

كما هو موضح في شكل (5-11)

2) نحول إلى القيمة المعيارية.

$$ح\left(\frac{70-65}{5} < ى < \frac{70-75}{5}\right)$$

$$= ح\ (-1 < ى < 1)$$



شكل (5-12)

ولأن القيم المعيارية محصورة بين قيمة سالبة وموجبة

وعليه فإن المساحة المطلوبة عبارة عن منطقتين

$$م = م_1 + م_2 = 0.3413 + 0.4313$$

$$= 0.6826$$

عدد الطلاب المطلوب = 0.6826 × 20000

= 13652 طالب

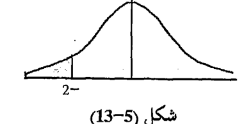
كما هو موضح في شكل (5-12)

3) $ح\left(ى < \frac{70-60}{5}\right)$

$$= ح\ (ى < -2\ )$$

$$= 0.5000 - 0.4773$$

$$= 0.0227$$

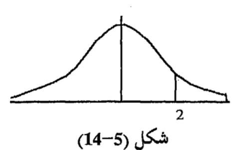


شكل (5-13)

عدد الطلاب المطلوب = 0.0227×20000

= 454 طالبا

كما هو موضح في شكل (5-13)



شكل (5–14)

4) $\text{ح}\left(\text{ى} > \frac{80-70}{5}\right) = \text{ح}(\text{ى} > 2)$

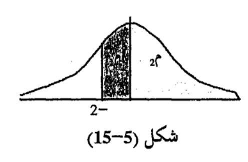
$= 0.5000 - 0.4773$

$= 0.0227$

عدد الطلاب المطلوب = 0.0227×20000

= 454 طالبا

كما هو موضح في شكل (5–14).



شكل (5–15)

5) $\text{ح}\left(\text{ى} > \frac{60-70}{5}\right) = \text{ح}(\text{ى} > -2)$

$= 0.5000 + 0.4772$

$= 0.9773$

عدد الطلاب = 0.9773×20000

= 1546 طالبا

كما هو موضح في شكل (5–15).

6) $\text{ح}\left(\text{ى} > \frac{80-70}{5}\right) + \text{ح}\left(\text{ى} < \frac{80-70}{5}\right)$

$\text{ح}(\text{ى} > 2) + \text{ح}(\text{ى} < 2)$

$0.0227 + 0.9773 = 1$

عددهم = 20000

شكل (5–16)

كما هو موضح في شكل (5–16).

وحديثاً استخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري التجميعي ولتوضيح هذا الاستخدام

نورد مزيداً من الأمثلة مستخدمين الأسلوب التجميعي.

مثال(5–1): احسب الاحتمالات التالية باستخدام جدول التوزيع الطبيعي التجميعي:

(1) ح(-1 < ي < 1) ،

(2) ح (-1.35 < ي < 2.1)

(3) ح (1.2 < ي < 3)

(4) ح(ي > 1.2)

(5) ح(ي < 2.4)

(6) ح (-2 < ي < 2)

الحل: (1) ح (-1 < ي < 1) = Ø(1) − Ø(-1) = 0.8413 − 0.1587 = 0.6826

(2) ح (-1.35 < ي < 2.1) = Ø(2.1) − Ø(-1.35) =

= 0.9821 − 0.0885 = 0.8936

(3) ح (1.2 < ي < 3) = Ø(3) − Ø(1.2)

= 0.9987 − 0.8849 = 0.1138

(4) ح (ي > 1.2) = 1 − ح(ي < 1.2)

= 1 − 0.8849 = 0.1151

(5) ح(ي < 2.49) = 0.9936 الإجابة مباشرة من الجدول

(6) ح(-2 < ي < 2) = Ø(2) − Ø(-2) =

= 0.9772 − 0.0228 = 0.9544

مثال (5–4): اذا علم ان علامات مجموعة من الطلاب في احد الكليات تخضع

للتوزيع الطبيعي N (62، 49) فاذا اختير شخص ما بطريقة عشوائية ما احتمال انه قد حصل على علامة اكثر من 75.

الحل: μ= 62، σ^2 = 49، σ = 7، $س_ر$ = 75 ثم نحول قيمة المشاهدة إلى قيمة معيارية.

$$ح\left(ي > \frac{75-62}{7}\right) = ح\left(ي > \frac{13}{7}\right) = ح(ي > 1.86)$$

$$= 1 - ح(ي \leq 1.86) = 1 - \varnothing(1.86)$$

$$= 1 - 0.9686 = 0.0314$$

كما هو موضح في شكل (5-17)

0.9686

ى=0 1.86

شكل (5-11)

مثال (5-5) : احسب الاحتمالات التالية:

(1) ح(ى> 2) (2) ح(1.4 < ى < 2.89) (3) ح (ى < -2.81)

(4) ح(-1.35 < ى < 1.73) (5) ح(0 < ى < 0.97)

(6) ح(ى < 2.1) (7) ح(ى < - 2.85)

الحل:

(1) ح(ى> 2) = 1-$\varnothing$(2) = 1- 0.9772 = 0.0228

(2) ح (1.4<ي< 2.89)=$\varnothing$(2.89)-$\varnothing$ (1.4)= 0.9881 -0.9192=0.0789

(3) ح(ي<-2.81)= 0.0025

(4) ح(-1.35< ي <1.73) = $\varnothing$ (1.73) -$\varnothing$(-1.35)

= 0.9582 -0.0885 = 0.8697

(5) ح(0<ي< 0.197) = Ø (0.97) −Ø(0)=

(6) ح (ي<2.1) = Ø (2.1) = 0.9821

(7) ح(ي>−2.85)=1−Ø(−2.85) =1−0.0022

مثال (5−6): اذا كان عمر احد انواع البطاريـات يتبع التوزيـع الطبيعي بمتوسـط 3 سنوات وانحراف معياري نصف سنة فاذا اختير من هذا الانتاج بطارية واحدة عشوائية اوجد ح(س< 2.3 سنة)

الحل: μ= 3، $\sigma = \frac{1}{2}$، س< 2.3

$$ح\left(ي < \frac{2.3-3}{\frac{1}{2}}\right) = ح\left(ي < \frac{2.3-3}{0.5}\right) = ح\left(ي < \frac{7}{5}\right)$$

$$= ح\left(ي < -1.4\right) = Ø\left(-1.4\right) = 0.0808$$

مثال (5−7): اذا علم ان علامات الطلاب في احد الكليات تتبـع التوزيـع الطبيـــعي حيث N (14، 8) والمطلوب حساب

(1) احتمال العثور على شخص له علامة اقل من 72.

(2) احتمال الحصول على علامة اكثر من 80

(3) احتمال ان تكون له علامة تتراوح بين 60 − 70

(4) اذا منح اعلى من 8٪ من الطلبة على تقدير ممتاز ما هي العلامة التي تخول الطالب للحصول على هذا التقدير.

(5) اذا اعتبر ما نسبته 12٪ من الطلبة راسباً ماهي علامة الرسوب.

الحل: μ = 64، σ = 8

$$0.8413 = (1)\varnothing = (1 > \text{ي})\text{ح} = \left(\frac{64-72}{8} > \text{ي}\right)\text{ح} \qquad (1)$$

$$(2)\varnothing - 1 = (2 < \text{ي})\text{ح} = \left(\frac{64-80}{8} < \text{ي}\right)\text{ح} \qquad (2)$$

$$0.0228 = 0.99772-1=$$

$$\left(\frac{64-70}{8} \geq \text{ي} \geq \frac{64-60}{8}\right)\text{ح} = (70 \geq \text{ي} \geq 60)\text{ح} = \qquad (3)$$

$$(0.75 \geq \text{ي} \geq 0.5-)\text{ح} = \left(\frac{6}{8} \geq \text{ي} \geq \frac{4-}{8}\right)\text{ح} =$$

$$(0.5-)\varnothing - (0.75)\varnothing =$$

$$0.4649 = 0.3085-0.7734=$$

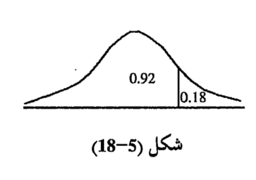
$$\frac{64-\text{س}_{\text{ر}}}{8} = \text{ي} \qquad (4)$$

$$\frac{64-\text{س}_{\text{ر}}}{8} = \frac{1.405}{1}$$

$$11.240 = 64- \text{س}_{\text{ر}}$$

$$11.240 + 64.0 = \text{س}_{\text{ر}}$$

$$75.240 =$$



شكل (5–18)

وموضح ذلك في شكل (5–18)

$$\frac{64-\text{س}_{\text{ر}}}{8} = \text{ي} \qquad (5)$$

$$\frac{64-\text{س}_{\text{ر}}}{8} = \frac{1.175-}{1}$$

$$-9.400=64- \text{س}_{\text{ر}}$$

$$64+9.4-=\text{س}_{\text{ر}}$$

شكل (5–19)

=+54.6 علامة الرسوب

كما هو موضح في شكل (5-19)

مثال (5-8) : اذا علم ان للمتغير العشوائي س التوزيع الطبيعي متوسطه μ =50 ، وتباينه σ^2=100

المطلوب ايجاد احتمال ان هذا المتغير يقع بين 45< س< 62

الحل: الاحتمال المطلوب $ح\left(\frac{45-50}{10} < ي < \frac{62-50}{10}\right) = ح(-0.5 < ي < 1.2)$

$= \varnothing(1.2) - \varnothing(-0.5)$

$= 0.8849 - 0.3085 = 0.5764$

مثال (5-9): اذا علم ان احد انواع البطاريات يعمل حتى 3 سنوات بالمتوسط بانحراف معياري $\frac{1}{2}$ سنة فعلى اعتبار ان لعمر البطارية توزيع معتاد ماهو احتمال ان يحصل على بطارية تعمر فترة اقل من 2.3 سنة.

الحل: μ=3 سنة ، σ = 0.5

$ح(س < 2.3) = ح\left(ي < \frac{2.3-3}{0.5}\right) = ح\left(ي < \frac{-0.7}{0.5}\right)$

$= ح(ي < -1.4) = \varnothing(-1.4) = 0.0808$

مثال (5-10): اذا علم ان احد مصانع اللمبات يعمر بالمتوسط 800 ساعة وبانحراف معياري 40 ساعة اذا اخذت لمبة عشوائيا من انتاج هذا المصنع ما احتمال ان تحترق بين 778 ، 834 ساعة .

الحل: μ= 800 ساعة ، σ =40 ساعة

$ح(778 < س < 834) = ح\left(\frac{778-800}{40} < ي < \frac{834-800}{40}\right)$

$$= ح\left(\frac{-22}{40} < ي < \frac{34}{40}\right)$$

$$= ح(-0.55 < ي < 0.85)$$

$$= \varnothing(0.85) - \varnothing(-0.55)$$

$$= 0.8023 - 0.2912 = 0.5111$$

مثال (5–11): اذا كان متوسط العلامات في امتحان ما هو 74 علامة والانحراف المعياري 7 وبناء على صيغة التعبير عن العلامة المطلقة بالتقدير بالحرف قرر المدرس ان يعطي تقدير أ لأعلى 12٪ من الطلبة.

المطلوب: على اعتبار ان للعلامات توزيع الطبيعي حساب اقل علامة تؤهل الطالب للحصول على هذا التقدير

الحل: $\mu = 74$ $\sigma = 7$

نحسب أولاً القيمة المعيارية من المعطيات

$\varnothing(ي) = 0.88$

$ي = 1.175$

$$ي_ر = \frac{س_ر - \mu}{\sigma}$$

$$\frac{1.175}{1} = \frac{س - 74}{7}$$

$س - 74 = 1.175 \times 7 = 8.225$

$س = 74 + 8.225 = 82.225$

الخطوات التي اتبعت للحصول على النتيجة اعلاه:

- نرسم المنحنى لتوضيح المساحة التي يقع ضمنها من سيحصلون على تقدير أ ومن الذين لن يحصلوا على هذا التقدير $= 1 - 0.12 = 0.88$

- نبحث من خلال الجدول التوزيع الطبيعي المعياري عن القيمة المعيارية المقابلة للمساحة 0.88 فنجد انها تتوسط المساحتين

$$0.8800$$

0.8810	0.8790
ي = 1.18	1.17

القيمة التي تقابل 0.88 هي:

$$\frac{1.17+1.18}{2} = 1.175$$

مثال (5–12) : في تقييم نتائج الامتحان لاحد المساقات لعدد من الطلبة بلغ 120 طالبا وجد ان متوسط العلامات 64 والانحراف المعياري 8 فاذا اختير طالب عشوائيا

(1) ما هو احتمال ان تكون درجته اكبر من 70.

(2) ما هو احتمال ان تكون درجته بين (55، 80).

(3) ما هواحتمال ان يكون قد حصل على درجة اقل من 80.

(4) ما هو احتمال ان يكون قد حصل على درجة على الأكثر 75.

(5) اذا حدد ما نسبته 8٪ لمنحهم تقدير ممتاز ماهي ادنى درجة تؤهل الطالب للحصول على هذا التقدير.

(6) ماهو عدد الطلبة المتوقع لأولئك الحاصلين على علامات اقل من 54.

الحل: $\mu = 64$ ، $\sigma = 8$

(1) $\therefore ح(س > 70) = ح\left(ي > \frac{70-64}{8}\right) = ح\left(ي > \frac{6}{8}\right) = ح(ي > 0.75) = 1 - 0.7734 = 0.2266$

$ح\left(\frac{55-64}{8} < ي < \frac{80-64}{8}\right) = ح\left(\frac{-9}{8} < ي < \frac{16}{8}\right) =$

$ح(1.125 < ي < 2)$

$\emptyset(2) - \emptyset(-1.135) = 0.9772 - 0.1292 = 0.8480$

(3) $ح(س < 80) = ح\left(ي < \frac{80 - 64}{8}\right) = ح(ي < 2) = \emptyset(2) = 0.9772$

(4) $ح(س < 75) = ح\left(ي < \frac{75 - 64}{8}\right) = ح(ي < 1.38) = \emptyset(1.38) = 0.9192 = \emptyset(1.38)$

(5) $س - 64 = 11.24 \Leftarrow س_{ر} = 11.24 + 64 = 75.24$

(6) $ح(س < 54) = ح\left(ي < \frac{54 - 64}{8}\right) = ح(ي < -1.3) = \emptyset(-1.3) = 0.0968$

عدد الطلاب المتوقع $0.0968 \times 120 = 11.616 \cong 12$ طالباً.

مثال (5–13): اذا علم ان معدلات الكفاءة في احدى الكليات التي عدد طلابها 300 طالب تتبع توزيعا طبيعيا بمتوسط 2.1 وانحراف معياري 1.2 كم من هؤلاء الطلبة يتوقع ان تكون علاماته تتراوح بين 2.5–3.5 اذا علم ان التقريب هو لاقرب خانة عشرية.

الحل: ن= 300، μ= 2.1 ، σ =1.2

$ح\left(\frac{2.5 - 2.1}{1.2} < ي < \frac{3.5 - 2.1}{1.2}\right) = ح\left(\frac{0.4}{1.2} < ي < \frac{1.4}{1.2}\right)$

$= ح(0.33 < ي < 1.17)$

$= \emptyset(1.17) - \emptyset(0.33)$

$= 0.247$

عدد الطلاب $= 300 \times 0.2497 = 75$ طالباً

أسئلة عامة على المنحنى الطبيعي

س1 اعطيت احدى الشعب امتحانا في الاحصاء من عشر علامات، وكانت النتائج تتدرج من الصفر حتى (10) وكان متوسط علامات الطلاب في هذا الامتحان 6.5 والانحراف المعياري 1.5 فاذا افترضنا ان العلامات تتوزع توزيعا طبيعيا فأوجد ما يلي:-

1) حدد النسبة المئوية لعدد الطلاب الذين حصلوا على (7) علامات.

2) اكبر علامة سجلها ال 20٪ من الطلاب ذوي العلامات المتدنية في الفصل.

3) اصغر علامة سجلها ال 20٪ من الطلاب ذوي العلامات المرتفعة في الفصل.

س2 اخذت عينة مكونة من 200 انبوب من احدى مصانع الانابيب وكان متوسط قطر الانبوب 10 سم والانحراف المعياري 0.5 سم وكان استخدام هذا الانبوب يسمح بانحراف في القطر يتراوح اقصاه من 9.5 - 10.5 سم وفيما غير ذلك تعتبر الانابيب تالفة. اوجد النسبة المئوية للانابيب التالفة الناتجة في هذا المصنع على افتراض ان اقطار الانابيب تتوزع توزيعا طبيعيا.

س3 متوسط طول 400 شجرة سرو 7م والانحراف المعياري 0.8 م فاذا فرضنا ان الاطوال تتوزع توزيعا طبيعيا فاوجد ما يلي:-

1- عدد الاشجار التي اطوالها بين 6-7.5م

2- عدد الاشجار التي تزيد اطوالها عن 8م

س4 اذا كان متوسط اعمار البدلات التي تستوردها المؤسسة العسكرية للجنود 36

شهرا والانحراف المعياري 6 شهور وكان عمر البدلات يأخذ شكل التوزيع الطبيعي فاذا استوردت المؤسسة 5000 بدلة فكم بدلة تحتاج الى الاستبدال بعد 30 شهراً.

س5 اذا كانت وزارة التعليم العالي تمنح لاعلى 4٪ من طلبة كليات المجتمع في الفحص الشامل بعثات دراسية وكانت علامات طلاب الكلية قريبة من توزيع طبيعي وسطه الحسابي 65 وانحرافه المعياري 6 فما هي اقل علامة تحصل على بعثة دراسية.

س6 الازواج التالية هي قيم معيارية تحصر بينها جزءا من مساحة المنحنى المطلوب ايجاد المساحة الواقعة خارج كل زوجين.

أ- (−1.8، 1.8) ب- (−1.6، 1.6) جـ (−2.28، 2.28)

س7 جد المساحة المحصورة بين كل زوج من القيم المعيارية التالية:−

أ- (−0.4، 0.4) ب- (−0.6، 0.6) جـ (−1.2، 1.2)

س8 جد المساحة الموجودة الى يمين كل من القيم المعيارية التالية :

أ) −1.3 ب) −1 ج) 1.2 د) −0.8

س9 جد المساحة الموجودة الى يسار كل من القيم المعيارية التالية :

أ) 1.5 ب) 0.8 ج) صفر د) −0.5

الوحدة السادسة

نظرية الاحتمالات

مقدمة:

تبحث نظرية الاحتمالات في الحوادث التي نتائجها غير مؤكدة بل عشوائية وهنا نعطي التعريف التالي.

تعريف: العشوائية هي التجربة التي نتائجها ترتبط بالصدفة وكذلك غير مؤكدة النتائج.

ومن المفيد ايضا وحتى نستطيع فهم نظرية الاحتمالات بشكلها الجيد لابد من تقديم التعريفات التالية والتركيز على مزيد من الامثلة.

1-6 : الفضاء العيني :

تعريف : الفضاء العيني لتجربة ما هو مجموعة جميع النتائج المتوقعة من هذه التجربة وسنرمز لها بالرمزΩ.

تعريف: الحدث هو مجموعة جزئية من الفضاء العيني وسنرمز له بأي حرف من الحروف الابجدية.

وهناك عدة انواع من االاحداث نقدم تعريفاتها.

تعريف: الحدث البسيط هو الحدث الذي تحتوي مجموعته على عنصر واحد من عناصر الفضاء العيني.

تعريف: الحدث المركب هو الحدث الذي تحتوي مجموعته على اكثر من عنصر من عناصر الفضاء العيني.

تعريف: الحدث المؤكد هو الحدث الذي تحتوي مجموعته على جميع عناصر الفضاء العيني.

تعريف: الحدث المستحيل هو الحدث الذي يستحيل وقوعه ومجموعته لا تحتوي على عناصر من عناصر الفضاء العيني.

بعد تناولنا لهذه التعريفات نورد الامثلة التالية.

مثال (6–1) : في تجربة القاء حجر نرد مرة واحد

1) اكتب الفضاء العيني لهذه التجربة.

2) الحدث أ الذي يمثل ظهور عدد اولي ثم اذكر نوع الحدث.

3) الحدث ب الذي يمثل ظهور عدد اولي ثم اذكر نوع هذا الحدث

4) الحدث جـ الذي يمثل ظهور العدد على الوجه العلوي لحجر النرد واذكر نوع الحدث.

5) الحدث د الذي يمثل ظهور عدد اقل من او يساوي 6 على الوجه العلوي واذكر نوعه.

6) الحدث هـ الذي يمثل ظهور العدد7 على الوجه العلوي لحجر النرد واذكر نوع الحدث.

الحل: 1) الفضاء العيني للتجربة Ω= {6،5،4،3،2،1}

2) الحدث أ= {6،4،2} وهذا حدث مركب لاحتواء مجموعته على اكثر من عنصر.

3) الحدث ب= {5،3،2} وهذا حدث بسيط لاحتواء مجموعته على عنصر واحد.

4) الحدث جـ= {1} وهذا حدث بسيط لاحتواء مجموعته على عنصر واحد.

5) الحدث د= {6،5،4،3،2،1} وهذا حدث مؤكد لاحتواء مجموعته على عناصر الفضاء العيني.

6) الحدث هـ = { }= ∅ وهذا حدث مستحيل لعدم احتواء مجموعته على عناصر

مثال (6–2) : في تجربة القاء قطعة نقود مرتين متتاليتين اكتب مايلي.

1) الفضاء العيني لهذه التجربة.

2) الحدث الذي يمثل ظهور وجهين متشابهين على الوجهين الظاهرين.

3) الحدث الذي يمثل ظهور كتابة واحدة على احد الوجهين الظاهرين.

4) الحدث الذي يمثل ظهور صورة واحدة على الاقل

5) الحدث الذي يمثل ظهور صورتين على الاكثر.

الحل: 1) Ω= {ص ص، ص ك، ك ص، ك ك} حيث ص يمثل ظهور صورة ، ك يمثل ظهور كتابة.

2) أ= {ص ص، ك ك} يعني ظهور صورتين او كتابتين.

3) جـ = {ص ك، ك ص}

4) جـ = {ص ك، ك ص، ص ص}

5) د = {ك ك ، ك ص، ص ك ، ص ص}=Ω

مثال (6−3) : صندوق به 8 مصابيح خمسة منها سليم سحب مصباحان على التوالي دون ارجاع اوجد ما يلي

1) عدد عناصر الفضاء العيني لهذه التجربة.

2) عدد عناصر الحدث أ الذي يمثل ظهور اثنتين سليمتين.

3) عدد عناصر الحدث ب الذي يمثل ظهور اثنتين تالفتين.

4) عدد عناصر الحدث جـ الذي يمثل ظهور احدهما سليم والاخرى تالفة.

الحل:

1) عدد عناصر الفضاء العيني= $\binom{8}{2} = \frac{8!}{(8-2)!2!} = \frac{8\times7\times6!}{6!\times2\times1} = 28$ حيث ان عدد المصابيح = 8 ويراد اختيار اثنتين منها.

2) عدد عناصر الحدث أ= $\binom{5}{2} = \frac{5\times4}{2\times1} = 10$ حيث ان عدد المصابيح السليمة هو 5 ويراد اختيار اثنتين منها.

3) عدد عناصر الحدث ب= $\binom{3}{2} = \frac{3\times2}{2\times1} = 3$ حيث ان عدد المصابيح التالفة 3 ويراد اختيار اثنتين منها.

4) عدد عناصر الحدث جـ= $\binom{5}{1}\binom{3}{1}$ =5×3=15 حيث ان عدد المصابيح السليمة خمسة ويراد اختيار احدهما وكذلك المصابيح التالفة ثلاثة ويراد اختيار احدهما.

مثال (6-4): كيس به ثمانية كرات مرقمة من 1 الى 8 اوجد مايلي.

1) عدد عناصر الحدث أ الذي يمثل سحب ثلاث كرات في آن واحد دون ارجاع.

2) عدد عناصر الحدث ب الذي يمثل سحب ثلاثة كرات على التتابع دون ارجاع.

3) عدد عناصر الحدث جـ الذي يمثل سحب ثلاثة كرات مع الارجاع.

الحل: 1) عدد عناصر الحدث أ $= \binom{8}{3} = \frac{6\times 7\times 8}{1\times 2\times 3} = 56$

2) عدد عناصر الحدث ب= $7\times 8\times 6=336$ حيث ان اختيار المرة الاولى يتم بثمانية طرق مختلفة ولان السحب دون اعادة فلسحب الكرة الثانية يمكن ان يتم بسبعة طرق مختلفة لانه تبقى في الكيس سبعة كرات اما سحب الكرة الثالثة فيتم ذلك بستة طرق وهكذا.

3) عدد عناصر الحدث جـ= $8\times 8\times 8=512$ لان السحب مع الاعادة.

تعريف: نسمي الحدثان أ، ب من الفضاء العيني Ω بأنهما حدثان منفصلان اذا كان أ∩ب=$\varnothing$. أي لايوجد عناصر مشتركة بين الحدثين.

مثال (6-5) : في تجربة القاء حجر نرد مرة واحدة اذا كان الحدث أ يمثل ظهور عدد زوجي، والحدث ب يمثل ظهور عدد فردي على الوجه العلوي فهل الحدثان أ، ب حدثان منفصلان؟

الحل: نكتب عناصر الحدث أ= {2،4،6}.

عناصر الحدث ب= {1،3، 5}.

∴ أ∩ب=$\varnothing$ فان الحدثان أ، ب منفصلان.

6-2-2) نظريات في الاحتمالات

نظرية : اذا كان أ ⊂ Ω فان

(1) ∀ أ ⊂ Ω فان $0 \leq$ ح(أ)≤ 1

2) ح(Ω)=1

3) ح(ϕ)= 0.

4) ح(أ ∪ ب) = ح(أ) + ح(ب) − ح(أ ∩ ب)

5) أ ∩ ب ← ∅ ⇐ ح(أ ∪ ب)=ح(أ)+ح(ب).

6) ح(أ−ب)=ح(أ)−ح(أ ∩ ب)=ح(أ ∩ $\bar{ب}$)

7) ح(ب−أ)=ح(ب)−ح(أ ∩ ب)=ح($\bar{أ}$ ∩ ب)

وهنا بعض الخصائص في الاحتمالات نورد اهمها

1) اذا كانت الاحداث $أ_1$، $أ_2$، $أ_3$، ....$أ_ن$ كل اثنين فيهما احداثا منفصلة فاذا كان $أ_1 ∪ أ_2 ∪ أ_3 ..... ∪ أ_ن = Ω$ فان

ح($أ_1 ∪ أ_2 ∪ أ_3 ..... ∪ أ_ن$)= ح ($أ_1$) +ح ($أ_2$)+ح ($أ_3$)+.... +ح ($أ_ن$)=ح(Ω)=1

2) اذا كان أ ⊂ ب ⇐ ح(أ)≤ح(ب).

3) ح($\bar{أ}$)=1−ح(أ) حيث $\bar{أ}$ هي متمم الحدث أ بالنسبة لـΩ.

مثال (6−6) : اذا كان Ω= {$أ_1$، $أ_2$،$أ_3$، $أ_4$} والدوال التالية معرفة على Ω فأي من هذه الدوال هي دالة احتمالية.

1) $ح_1(أ_1)=\frac{1}{3}$، $ح_1(أ_2)=\frac{1}{4}$، $ح_1(أ_3)=\frac{1}{5}$، $ح_1(أ_4)=\frac{1}{6}$

2) $ح_2(أ_1)=\frac{1}{3}$، $ح_2(أ_2)=\frac{1}{3}$، $ح_2(أ_3)=\frac{-1}{3}$، $ح_2(أ_4)=\frac{1}{6}$

3) $ح_3(أ_1)=\frac{1}{4}$، $ح_3(أ_2)=$ صفر، $ح_3(أ_3)=\frac{1}{2}$، $ح_3(أ_4)=\frac{1}{4}$

ملاحظة: حتى تكون الدالة المعطاة دالة احتمالية يجب ان يكون مجموع احتمالات عناصر الفضاء العيني .

الحل: (1) $أ_1 ∪ أ_2 ∪ أ_3 ∪ أ_4 = Ω$

1) $ح_1(أ_1)+ح_1(أ_2)+ح_1(أ_3)+ح_1(أ_4)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{20+15+12+10}{60}=\frac{57}{60}\neq 1$

∴ الدالة ليست دالة احتمالية.

2) ∴ $ح_2(ح_3)=\frac{-1}{3}$ ولايجوز ∴ $ح_2$ ليس دالة احتمال.

3) $ح_3(أ_1)+ح_3(أ_2)+ح_3(أ_3)+ح_3(أ_4)=\frac{1}{4}+0+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=1$

$0\leq ح_3(أ_ي)\leq 1$ ، $أ_1 \cup أ_2 \cup أ_3 \cup أ_4 = \Omega$

∴ فالدالة $ح_3$ دالة احتمال.

مثال(6−7): اذا كان $\Omega=\{أ_1، أ_2، أ_3، أ_4\}$ واذا كان ح دالة احتمالية معرفة على Ω

اوجد قيمة المجهول في كل مما يلي.

1) $ح(أ_1)=\frac{1}{3}$ ، $ح(أ_2)=\frac{1}{6}$ ، $ح(أ_3)=\frac{1}{9}$ ، $ح(أ_4)=؟$

2) $ح(أ_1)=ح(أ_2)=\frac{1}{4}$ ، $ح(أ_3)=2ح(أ_4)$ =اوجد $ح(أ_3)=؟$ ، $ح(أ_4)=؟$

الحل: 1) $ح(أ_1)+ح(أ_2)+ح(أ_3)+ح(أ_4)=1$ لان الدالة ح احتمالية.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+ح(أ_4)=1$$

$$\frac{6+3+2}{18}+ح(أ_4)=1 \Leftarrow \frac{11}{18}+ح(أ_4)=1$$

$$∴ ح(أ_4)=1-\frac{11}{18}=\frac{7}{18}$$

2) اذا فرضنا ان $ح(أ_4)$ =س فان $ح(أ_3)$ = 2 س وعليه فان

$ح(أ_1)+ح(أ_2)+ح(أ_3)+ح(أ_4)=1$ لان الدالة ح احتمالية

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+2س+س=1$$

$$\frac{2}{4}+3س=1$$

$$3س=1-\frac{2}{4}=\frac{2}{4}$$

∴ $س=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ ∴ $ح(أ_4)=\frac{1}{6}$ ، $ح(أ_3)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

مثال(6–8): اذا كان لدينا $\text{ح}(\text{أ})=\frac{1}{2}$ ، $\text{ح}(\text{ب})=\frac{3}{8}$ ، $\text{ح}(\text{أ}\cap\text{ب})=\frac{1}{4}$

اوجد ما يلي:

1) $\text{ح}(\text{أ}\cup\text{ب})$ 2) $\text{ح}(\overline{\text{أ}})$ 3) $\text{ح}(\overline{\text{ب}})$ 4) $\text{ح}(\overline{\text{أ}}\cap\overline{\text{ب}})$ 5) $\text{ح}(\overline{\text{أ}}\cup\overline{\text{ب}})$

6) $\text{ح}(\text{أ}\cap\overline{\text{ب}})$ 7) $\text{ح}(\overline{\text{أ}}\cap\text{ب})$.

الحل:

1) $\text{ح}(\text{أ}\cup\text{ب}) = \text{ح}(\text{أ}) + \text{ح}(\text{ب}) - \text{ح}(\text{أ}\cap\text{ب})$

$= \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{4+1-2}{8} = \frac{3}{8}$ (2

3) $\text{ح}(\overline{\text{ب}}) = 1 - \text{ح}(\text{ب}) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

4) $\text{ح}(\overline{\text{أ}}\cap\overline{\text{ب}}) = \text{ح}(\overline{\text{أ}\cup\text{ب}}) = 1 - \text{ح}(\text{أ}\cup\text{ب}) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

5) $\text{ح}(\overline{\text{أ}}\cup\overline{\text{ب}}) = \text{ح}(\overline{\text{أ}\cap\text{ب}}) = 1 - \text{ح}(\text{أ}\cap\text{ب}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

ملاحظة: القانونان اللذان ساعدتا في حل الجزء 4،5 هما قانونان ديمورغات في الاحتمالات وهما:

1) $\text{ح}(\overline{\text{أ}\cap\text{ب}}) = \text{ح}(\text{أ}\cup\overline{\text{ب}})$

2) $\text{ح}(\text{أ}\cup\overline{\text{ب}}) = (\overline{\text{أ}\cap\text{ب}})$

6) $\text{ح}(\text{أ}\cap\overline{\text{ب}}) = \text{ح}(\text{أ}) - \text{ح}(\text{أ}\cap\text{ب}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

7) $\text{ح}(\overline{\text{أ}}\cap\text{ب}) = \text{ح}(\text{ب}) - \text{ح}(\text{أ}\cap\text{ب}) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8} - \frac{2}{8} = \frac{1}{8}$

6-2-3) الاحتمال المنتظم والتكرار النسبي:

تعريف: اذا كان احتمال وقوع كل مفردة من مفردات الفضاء العيني متساوٍ فاننا نقول بأن الاحتمال منتظم.

فاذا كان أ حدث في Ω فان احتمال أ يمكن ايجاده من العلاقة

$$ح(أ) = \frac{ن(أ)}{ن(\Omega)} = \frac{\text{عدد عناصر الحدث أ}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}} \qquad (1-6)................$$

مثال (6−9): في تجربة القاء حجر نرد مرة واحدة ان احتمال ظهور كـل عنصـر مـن الفضاء العيني ح(1)=ح(2)=ح(3) =ح(4)=ح(5)=ح(6)=$\frac{1}{6}$.

وعليه فان هذا الاحتمال يسمى بالاحتمال المنتظم أو التكرار النسبي.

مثال(6−10): في تجربة سباق الخيول فان احتمال نجاح خيل مختلف عن الخيل الآخـر وعليه فان هذا النوع من الاحتمال يسمى بالاحتمال غير المنتظم.

مثال(6−11): كيس به خمسة كرات حمراء، 4 بيضاء، 3 زرقـاء سـحب مـن الكيـس كرة واحدة ما احتمال ان تكون الكرة المسحوبة بيضاء.

الحل: ليكن أ هو الحدث الذي يمثل ظهوره كرة بيضاء فان عدد الكـرات البيضـاء في الكيس 4 وعدد الكرات جميعها 12.

$$\therefore \; ح(أ) = \frac{ن(أ)}{ن(\Omega)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

مثال(6−12): صندوق به 12 كرة مرقما من 1 الى 12 سحب مـن الصنـدوق كـرة واحدة ما احتمال ان تكون الكرة المسحوبة عليها رقم يقبل القسمة على 3.

الحل: ليكن الحدث هو أ وعليه فان

أ={3،6،9،12} ، ن(أ)=4 ، ن(Ω)=12∴

$$ح(أ) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

مثال (6−13): صندوق به 5 كرات حمراء، 3 كرات زرقـاء، 4 كـرات صفـراء؟ مـا احتمال ان تكون الكرتان المسحوبتان حمراوان.

3) سحبت اربعة كرات على التوالي دون ارجاع ما احتمال ان تكون اول كرتان مسحوبتان حمراوان والثالثة صفراء والرابعة زرقاء؟

4) سحبت ثلاث كرات على التوالي مع الارجاع ما احتمال ان تكون الكرة الاولى حمراء والثانية صفراء والثالثة زرقاء؟

الحل: 1) ليكن الحدث المطلوب أ فان:

$$ح(أ) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{\frac{4\times5}{1\times2}}{\frac{11\times12}{1\times2}} = \frac{10}{66} = \frac{5}{33}$$

2) ليكن الحدث المطلوب ب فان

$$ح(ب) = \frac{\binom{5}{1}\binom{4}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{\frac{5}{1}\times\frac{3\times4}{1\times2}}{\frac{10\times11\times12}{1\times2\times3}} = \frac{30}{220} = \frac{3}{22}$$

3) ليكن الحدث المطلوب هو جـ فان ح(جـ)

$$ح(جـ) = \frac{5}{12}\times\frac{4}{11}\times\frac{4}{10}\times\frac{3}{9} = \frac{2}{99}$$

4) ليكن الحدث المطلوب د فان ح(د)

$$ح(د) = \frac{4}{12}\times\frac{5}{12}\times\frac{3}{12} = \frac{5}{144}$$

لان السحب مع الاعادة وعليه يبقى عدد الكرات الكلي=12 وعدد الكرات من كل لون ثابت.

مثال (6–14): صندوق به 15 مصباح خمسة منها تالفة سحبت من الصندوق ثلاث مصابيح معا اوجد الاحتمالات التالية.

1) احتمال ان الثلاثة مصابيح سليمة.

2) احد هذه المصابيح الثلاث تالف.

3) احتمال احدها على الاقل تالف.

الحل: 1) عندما يكون عدد المصابيح التالفة خمسة مصابيح معنى ذلك ان عشرة فيها سليم ويراد سحب 3 مصابيح من بين خمسة عشر مصباح ويتم ذلك بعدد الطرق المختلفة $= \binom{15}{3} = \frac{13\times14\times15}{1\times2\times3} = 455$ طريقة

ويراد ان تكون الثلاثة مصابيح المسحوبة سليمة وبما ان عدد المصابيح السليمة 10 لذا يمكن اختيار ثلاثة منها بعدد من الطرق $= \binom{10}{3} = \frac{8\times9\times10}{1\times2\times3} = 120$ طريقة مختلفة

وعليه فاذا كان الحدث المطلوب هو أ فان ح(أ)$= \frac{120}{455} = \frac{24}{91}$

2) ليكن الحدث ب هو الحدث المطلوب فان

$$ح(ب) = \frac{\binom{5}{1}\binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{\frac{5}{1}\times\frac{9\times10}{1\times2}}{\frac{13\times14\times15}{1\times2\times3}} = \frac{5\times45}{455} = \frac{225}{455} = \frac{45}{91}$$

3) ان احتمال الحصول على الاقل واحدة تالفة هو متمم للحدث الذي يمثل الحصول على ثلاثة سليمة فاذا كان الحدث يمثل جـ فان

$$ح(جـ) = ح(\overline{أ}) = 1 - ح(أ)$$

$$= 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}$$

مثال (6–15): اذا كان لدينا عشر بطاقات مرقمة من 1 الى 10 بداخل صندوق خلطت بشكل جيد اوجد ما يلي.

1) اذا سحبت بطاقتان معا من الصندوق ما احتمال ان يكـون مجمـوع الرقمـين علـى البطاقتين عدد فردي.

2) اذا سحبت بطاقتان على التوالي دون ارجاع البطاقة المسحوبة ما احتمال ان يكون مجموع الرقمين الظاهرين عددا فرديا.

3) اذا سحبت بطاقتان على التوالي وكان السحب مع الارجـاع مااحتمـال ان يكـون مجموع الرقمين الظاهرين على البطاقتين عددا فرديا.

الحل: 1) ان سحب بطاقتين من بين عشرة بطاقـات يتم بعـدد مـن الطـرق المختلفـة عددها عدد الطرق $=\binom{10}{2}=\frac{9\times10}{1\times2}=45$.

اما بالنسبة لسحب بطاقتين بحيـث يكـون مجموعهمـا فـردي يجـب ان تكـون البطاقـة الاولى اما عدد زوجي والبطاقة الثانية فردية لان المجموع فردي أي عدد زوجي+عـدد فردي = عدد فردي وهنا لدينا خمسة اعداد فردية وخمسـة اعـداد زوجيـة وهـي علـى النحو التالي:

العدد الفردي	العدد الزوجي
1	2
3	4
5	6
7	8
9	10

ونستطيع تمثيل عدد الطرق المختلفة لسحب هذه البطاقات ليكون المجموع عدد فردي بالشـجرة علـى النحـو ومـن خـلال هـذا التمثيـل نلاحـظ ان عـدد الطـرق المختلفة=5×5=25 طريقة

(1) فاذا كان الحدث يمثل أ فان

$$ح(أ) = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$$

2) اذا كان الحدث المطلوب ب فان

$$ح(ب) = \frac{25+25}{90} = \frac{50}{90} = \frac{5}{9}$$

3) اذا كان الحدث المطلوب هو جـ فان

$$ح(جـ) = \frac{25+25}{100} = \frac{1}{2}$$

لان السحب مع الاعادة فان عدد الطرق المختلفة $=10\times10=100$

مثال (6–16): صف به 25 طالبا ذكور 15 اناثا رسب 9 طلاب، 6 طالبات في مادة الرياضيات اختير احد الطلبة بشكل عشوائي اوجد احتمال ان يكون الطالب المختار هو من الذكور او راسب في الرياضيات.

الحل: عدد عناصر الفضاء العيني ن(Ω) $=25+15=40$

وليكن الحدث أ هو الممثل لان يكون الطالب المختار هو من الذكور فان ن(أ)=25 وان الحدث ب يمثل ان يكون الطالب المختار راسب في الرياضيات فان ن(ب) $=9+6=15$ وان الحدث أ∩ب هو ان يكون الطالب المختار هو من الذكور وراسب في الرياضيات وان ن(أ∩ب)=9 وعليه فان

$ح(أ) = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$، $ح(ب) = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$، $ح(أ∩ب) = \frac{9}{40}$ والمطلوب ايجاد ح(أ∪ب) لذا نجد هذا الاحتمال من العلاقة ح(أ∪ب)=ح(أ)+ح(ب)−ح(أ∩ب)

$$= \frac{25}{40} + \frac{15}{40} - \frac{9}{40} = \frac{31}{40}.$$

مثال (6–17): في تجربة القاء حجر نرد متمايزين في الهواء اوجد الاحتمالات التالية.

1) ظهور عددين متساويين على الوجهين العلويين.
2) ظهور المجموع 10 على الوجهين الظاهرين.
3) ظهور المجموع 13 على الوجهين الظاهرين.
4) ظهور عدد فردي على احد الوجهين الظاهرين فقط.
5) ظهور عدد اكبر من 4 على احد الوجهين الظاهرين.
6) ظهور مجموع 9 على الاقل على الوجهين الظاهرين.
7) ظهور مجموع 6 على الوجهين الظاهرين او عدد زوجي على كلا الوجهين الظاهرين.
8) ظهور مجموع فردي على الوجهين الظاهرين.

الحل: ان الفضاء العيني لهذه التجربة Ω {(1،1)، (1،2)،......،(6،6)}

(1) أ= {(1،1)،(2،2)،(4،4)،(5،5)،(6،6)} ⇐ ح(أ) = $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

(2) ح (ب)= {(4،6)،(6،4)،(5،5)} ⇐ ح(ب) = $\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

(3) ح(ب)= ∅ ⇐ ح(جـ)=صفر.

4) د={(1،2)،(1،4)،(1،6)،(2،1)،(2،3)،(2،5)،(3،2)،(3،4)،(3،6)،(4،1)،

(4،3)،(4،5)،(5،2)،(5،4)،(5،6)، (6،1)، (6،3)، (6،5)}.

∴ح(د)= $\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$

5)هـ={(5،1)،(1،5)،(2،5)،(5،2)،(3،5)،(5،3)،(4،5)،(5،4)،(6،5)،(5،6)،

(1،6)، (6،1)،(2،6)،(6،2)،(3،6)،(6،3)،(4،6)،(6،4)}

ح(هـ)= $\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$

6)و={(4،5)،(5،4)،(5،5)،(6،5)،(5،6)،(6،6)،(6،4)،(4،6)،(3،6)،(6،3)}.

ح(و)= $\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

7) ل={(4،2)،(2،4)،(1،5)،(5،1)،(3،3)،(2،2)،(4،4)،(6،6)،(2،6)،(6،2)،
(6،4)،(4،6)}.

$$ح(ل)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

8) ع={(2،3)،(3،2)،(1،4)،(4،1)،(1،2)(2،1)،(1،6)،(6،1)،(5،2)،(2،5)،
(4،3)،(3،4)،(6،3)،(3،6)،(6،5)،(5،6)}.

$$ح(ع)=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}.$$

6-3) : الاحداث المستقلة :

تعريف: تكون الاحـداث مستقلة اذا كـان وقوعهـا بعضهـا البعـض واذا كـان أ، ب حدثان فحتى يكونا مستقلين فان.

1) ح(أ∩ب)=ح(أ) ح(ب)	
2)ح(أ/ب)=ح(أ)، ح(ب/أ)=ح(ب)	(6-2).............

ملاحظة: يجب التفريق بين الاحداث المستقلة والاحـداث المنفصلـة حيـث ان الاحـداث المستقلة تقاطعها ليس ∅ بينما الاحداث المنفصلة فان تقاطعها تساوي ∅.

مثال(6-18): في تجربة القاء قطعـتي نقـود متمـايزتين اذا كـان الحـدث أ يمثـل ظهـور الصورة على القطعة الاولى والحدث ب يمثل ظهور صورة على الثانية فهل الحدثان أ، ب مستقلين؟

الحل: نكتب أولاً المجموعات على صيغة عناصر

أ = { ص ك، ص ص}، ب= {ك ص ، ص ص}. وعليه فان

أ∩ب={ص ص}، ح(أ)= $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$، ح(أ∩ب)= $\frac{1}{4}$

ح(ب) = $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

∴ ح(أ)×ح(ب)= $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$=ح(أ∩ب)=∴ الحدثان أ،ب مستقلين

نتيجة: $ح(\overline{أ} \cap \overline{ب}) = ح(\overline{أ}) \times ح(\overline{ب})$

نظرية: اذا كان $أ_1$، $أ_2$ حدثان من Ω فان

1) $ح(\overline{أ_1 \cup أ_2}) = ح(\overline{أ_1} \cap \overline{أ_2}) = 1 - ح(أ_1 \cup أ_2)$

2) $ح(\overline{أ_1 \cap أ_2}) = ح(\overline{أ_1} \cup \overline{أ_2}) = 1 - ح(أ_1 \cap أ_2)$

وهذان القانونان يفيدان في حل كثير من المسائل في الاحتمالات.

نظرية بيز:

نص النظرية: اذا كان $أ_1$،$أ_2$،.....$أ_ن$ احداث في Ω بحيث ان

$أ_1$، $أ_2 \cap .....\cap أ_ن = \varnothing$

$أ_1$، $أ_2 \cup .....\cup أ_ن = \varnothing$

كما هو موضح بالشكل وبرز حدث يشترك في جميع الاحـداث الجزئيـة مثـل ي فـان احتمال حصول الحدث ي بمعلومية وقوع الحدث $أ_ر$ يكون على النحو التالي.

$$ح(ى/أ_ر) = \frac{ح(أ_ر/ي).ح(أ_ر)}{ح(أ_1/ي)ح(أ_1) + ح(أ_2/ي)ح(أ_2) + ...+ ح(أ_ن/ي)ح(أ_ن)} \quad ......(3-6)$$

مثال (6–19): في مصنع للمسامير الالة رقم 1 30٪ من المسامير والالة رقـم 2 40٪ والالة رقم 3=30٪ ونسب التالف هي ان الالة رقم 1 و2 للالة رقم 4 والالـة رقـم 3 واخذت مما انتجه المصنع ووجد انه تالف ما احتمال انه يصنع بواسطة الالة رقم3.

الحل: نضع ملخصاً للبيانات المعطاة:

$ح(م_1)=00.30$ $\quad$ $ح(أ_1/ب)=0.1$

$ح(م_2)=0.40$ $\quad$ $ح(أ_2/ب)=0.2$

$ح(م_3)=0.30$ $\quad$ $ح(أ_3/ب)=0.4$

$$\text{ح}(\text{ب}/\text{أ}_3) = \frac{\text{ح}(\text{أ}_3)(\text{أ}_3/\text{ب})}{\text{ح}(\text{أ}_1)(\text{أ}_1/\text{ب}) + \text{ح}(\text{أ}_2)(\text{أ}_2/\text{ب}) + \text{ح}(\text{أ}_3/\text{ب})\text{ح}(\text{أ}_3)}$$

$$= \frac{0.04 \times 0.3}{0.04 \times 0.30 + 0.02 \times 0.40 \times 0.01 \times 0.30}$$

$$= \frac{0.012}{0.02 + 0.008 + 0.003}$$

$$= \frac{0.012}{0.023} = 0.52$$

$$\text{ح}(\text{ب}/\text{أ}) \quad 1 - 0.52 = 0.48$$

مثال(6–20): ينتج احد معامل الاحذية ما نسبته 60٪ والآخر 40٪ من الانتاج الكلي فاذا علم ان نسبة السليم من الانتاج الاولي = 90٪ والثاني 80 ٪ .

1) المطلوب ايجاد احتمال سحب وحدة انتاج عشوائية خالية من العيوب.

2) اذا سحبت وحدة انتاج عشوائيا وتبين انها خالية من العييوب ما احتمال ان تكون من المعمل الاول.

$\text{ح}(I)=0.60$، $\text{ح}(\Pi)=0.40$

$\text{ح}(\text{س}/I)=0.90$، $\text{ج}(\text{س}/\Pi)=0.80$

1) $\text{ح}(\text{س})=\text{ح}(I)\times\ \text{ج}(\text{س}/I)+\text{ح}(\Pi)\times\text{ح}(\text{س}/\Pi)$

$=0.60\times0.90+0.40\times0.80=0.54+0.32=0.86$

2) $\text{ح}(\Pi/I)= \frac{\text{ح}(\text{س}_1/I)\times\text{ح}(I)}{\text{ح}(\text{س})} = \frac{0.60\times0.90}{0.86} = \frac{0.54}{0.86}$

6–4) الاحتمال الشرطي .

تعريف : ان احتمال حدث معين شرط وقوع حدث آخر ويرمزله بالرمز

$$\text{ح}(\text{أ}/\text{ب})= \frac{\text{ح}(\text{أ}\cap\text{ب})}{\text{ح}(\text{ب})} \Leftarrow \text{ح}(\text{أ}\cap\text{ب})=\text{ح}(\text{أ}/\text{ب})\times\text{ح}(\text{ب})$$

$$\text{ح}(\text{ب}/\text{أ})= \frac{\text{ح}(\text{أ}\cap\text{ب})}{\text{ح}(\text{أ})} \Leftarrow \text{ح}(\text{أ}\cap\text{ب})=\text{ح}(\text{ب}/\text{أ})\text{ح}(\text{أ}) \qquad \text{..........(4–6)}$$

وكذلك يمكن استنتاج ان الاحداث المتامة.

$$ح(\overline{أ}/\overline{ب}) = \frac{ح(\overline{أ} \cap \overline{ب})}{ح(\overline{ب})} = \frac{ح(\overline{أ \cup ب})}{1 - ح(ب)} = \frac{1 - ح(أ \cup ب)}{1 - ح(ب)}$$

$$ح(\overline{ب}/\overline{أ}) = \frac{ح(\overline{أ} \cap \overline{ب})}{ح(\overline{أ})} = \frac{ح(\overline{أ \cup ب})}{1 - ح(أ)} = \frac{1 - ح(أ \cup ب)}{1 - ح(أ)}$$

مثال(6–21): اذا كان ح(أ)= $\frac{1}{3}$، ح(ب)= $\frac{1}{4}$، ح(أ∪ب)= $\frac{1}{2}$ والمطلوب ايجاد ما يلي:

1) ح(أ/ب) 2) ح(ب/أ) 3) ح($\overline{أ}/\overline{ب}$)

4) ح ($\overline{ب}/\overline{أ}$) 5) ح(أ∩ $\overline{ب}$).

الحل: 1) من العلاقة

ح(أ∪ب) =ح(أ)+ح(ب)−ح(أ∩ب)

ح(أ∩ب)=ح(أ)+ح(ب)−ح(أ∪ب)

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{4+3-6}{12} = \frac{1}{12}$$

$$\therefore ح(أ/ب) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore ح(ب/أ) = \frac{ح(أ \cap ب)}{ح(ب)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

3) $$ح(\overline{أ}/\overline{ب}) = \frac{ح(\overline{أ} \cap \overline{ب})}{ح(\overline{ب})} = \frac{ح(\overline{أ \cup ب})}{1 - ح(ب)} = \frac{1 - ح(أ \cup ب)}{1 - ح(ب)} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

4) $ح(\bar{ب} / \bar{أ}) = \frac{ح(\bar{أ} \cap \bar{ب})}{ح(\bar{أ})} = \frac{1 - ح(أ \cup ب)}{1 - ح(أ)} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$

5) $ح(أ \cap \bar{ب}) = ح(أ) - ح(أ \cap ب) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{4-1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

نظرية: اذا كان $أ \cap ب = \emptyset$ فان $ح(أ \cap ب)$=صفر وعليه فان $ح(أ/ب)$=صفر، $ح(ب/أ)$=صفر.

6-5 : المتغيرات العشوائية ذات البعد الواحد :

المقدمة

سنتناول في هذها لفصل المتغيرات العشوائية ودوالها الاحتمالية ذات البعد الواحد وسنبدأ بإعطاء التعريف التالي :

6-5-1 تعريف المتغير العشوائي

تعريف : يقال للدالة التي تربط كل عنصر من عناصر الفضاء العيني بعدد حقيقي بالمتغير العشوائي ويمكن لهذا المتغير أن يقاس.

وهنا لابد من معرفة القيم الحقيقية التي سيأخذها المتغير العشوائي وكذلك احتمالاتها. وحتى يكون التوزيع الذي يمثل قيم المتغير العشوائي واحتمالاتها توزيعاً احتمالياً فإنه يتوجب أن يكون

$$\sum_{ر=1}^{ن} ح(س_ر) = ح(س_1) + ح(س_2) + \ldots + ح(س_ن) = 1 \quad \ldots\ldots (5-6)$$

ولتوضيح هذا لمفهوم نورد الأمثلة التالية

مثال (6-22) : في تجربة القاء قطعتي نقود (متمايزتين) معاً إذا كان المتغير العشوائي يمثل عدد مرات ظهور صورة أكتب التوزيع الذي يمثل القيم التي يأخذها المتغير العشوائي واحتمالاتها وبين أن هذا التوزيع هو توزيع احتمالي.

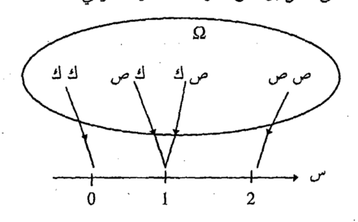
الحل : إن الفضاء العيني لهذا التوزيع هو Ω = {ص ص، ص ك، ك ص، ك ك}.
وعليه فإن قيم س هي على النحو التالي

س(ك ك) = صفر لأن عدد الصور الظاهرة هي صفرا.

س (ص ك، ك ص) = 1 لأن عدد الصور الظاهرة في كلتا الحالتين هي صورة واحدة.

س (ص ص) = 2 لأن عدد الصور الظاهرة هي صورتان.

والآن يمكن توضيح هذا المفهوم بالشكل (1-1) وهو الربط بين عناصر الفضاء العيني والأعداد الحقيقية حتى نصل إلى نص التعريف للمتغير العشوائي.



شكل (6-1) يمثل قيم س الممكنة

ولحساب احتمال قيم س نجدها كما يلي.

$$ح\ (س = صفر) = ح\ (ك\ ك) = \frac{1}{4}$$

$$ح\ (س = 1) = ح\ \{ك\ ص،\ ص\ ك\} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

ويمكن تلخيص ما وجد أعلاه في جدول التوزيع (6-1).

س	0	1	2
ح(س)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

جدول (6-1)

6-6 : بعض المقاييس على التوزيعات الاحتمالية

6-6-1 : القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي :

إذا كان لدينا المتغير العشوائي س وقيم هذا المتغير $س_1$، $س_2$، .... ، $س_ن$ وكان احتمال كل قيمة على التوالي ح (س = $س_1$)، ح (س=$س_2$)، ... ح(س= $س_ن$) فإن القيمة المتوقعة للمتغيرة العشوائي س والتي سنرمز لها بالرمز ت(س) تعرف على النحو التالي :

$$ت(س) = س_1 \cdot ح(س = س_1) + س_2 \cdot ح(س = س_2) + \ldots + س_ن ح(س = س_ن) = \mu$$

أو

$$ت(س) = \sum_{ر=1}^{ن} س_ر \cdot ح(س_ر) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6-6)$$

ونسمي ت(س)= μ بالمتوسط الحسابي للمجتمع.

وإذا كنا نناقش في أكثر من متغير عشوائي فإن القيمة المتوقعة لكل متغير يعبر عنها بالرمز μ ولكن يوضع تحتها اسم المتغير العشوائي كما يلي $\mu_س$،$\mu_ص$، .....

خاصية : إذا كانت حـ قيمة عددية ثابتة فإن.

$$ت(حـ) = حـ.$$

مثال (6–23) : الجدول (6–2) يمثل التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س.

س	−2	−1	1	2	3
ح(س)	0.1	0.3	0.3	0.2	0.1

جدول (6–2)

المطلوب : إيجاد القيمة المتوقعة لهذا التوزيع.

الحل : إن القيمة المتوقعة لهذا التوزيع يمكن إيجادها على النحو

ت(س) = −2 × 0.1 + −1 × 0.3 + 1 × 3.0 + 2 × 0.2 + 3 0.1

= −0.2 + 3.0 + 0.3 + 0.4 + 0.3 = 0.5

مثال (6–24) : إذا كان س متغير عشوائي ياخذ القيم م، 2م، 3م، .... ، م (م−1)، م^2. حيث م عدد صحيح، ك عدد ثابت وإذا كان الاحتمال لكل قيمة على النحو.

$$\text{ح (س=س}_\text{ر}\text{)} = \frac{\text{2س}_\text{ر}}{\text{ك}}$$

أوجد قيمة الثابت ك بدلالة م علما بأن توزيع س توزيعاً احتمالياً.

الحل : إن احتمالات المتغير العشوائي هي على التوالي

$$\text{ح (س=م)} = \frac{\text{2م}}{\text{ك}}$$

$$\text{ح (س=2م)} = \frac{\text{4م}}{\text{ك}}$$

⋮

$$\text{ح (س=م}^2\text{)} = \frac{\text{2م}^2}{\text{ك}}$$

ومن خاصيــة أن التوزيع الاحتمالي تكون مجموع الاحتمالات لقيم المتغير العشـوائي $= 1$ فإن

$$\frac{2م}{ك} + \frac{4م}{ك} + ... + \frac{2م^2}{ك} = 1$$ بأخذ العامل المشترك $\frac{2م}{ك}$

$\frac{2م}{ك}(1 + 2 + ... + م) = 1$ ومن العلاقة $1+2 + ... + م = \frac{م (م+1)}{2}$ نعوض

$\frac{م}{ك}\left(\frac{م (م+1)}{2}\right) = 1 \Leftarrow ك = م^2 (م+1)$.

الدالة $د = س^2$.

س	0	1	2	3
ح(س)	0.1	0.2	0.3	0.4
$د=س^2$	0	1	4	9

جدول (6–3)

$ت(د) = ت(س^2) = 0 \times 0.1 + 1 \times 0.2 + 4 \times 0.3 + 9 \times 0.4$

$= 0 + 0.2 + 1.2 + 3.6 = 5$

نظرية : ليكن س متغير عشوائي ، أ ،ب عددان ثابتان فإن

ت (أس + ب) = أ ت (س) + ب.

البرهان : من تعريف التوقع الرياضي لدالة المتغير العشوائي فإن

$ت (أ س + ب) = \sum_{ر=1}^{ن} (أس_ر+ب).ح(س_ر)$

$= (أس_1+ب)\ ح(س_1)+(أس_2+ب)\ ح(س_2) + ... + (أس_ن+ب).ح(س_ن)$

نفك الأقواس

= أس$_1$ح(س$_1$)+ب ح(س$_1$)+أس$_2$ح(س$_2$)+ب ح(س$_2$)+ ...+

أس$_ن$ح(س$_ن$)+ب ح(س$_ن$)

= أ[س$_1$ح(س$_1$)+ س$_2$ح(س$_2$) +...+ س$_ن$ح(س$_ن$)]+ب[ح(س$_1$)+ح(س$_2$)+...+ ح(س$_ن$)]

= أ.ت(س) + ب

لأن ت(س) = س$_1$ح(س$_1$)+س$_2$ح(س$_2$) + ... + س$_ن$ح(س$_ن$)،

ح(س$_1$) + ح(س$_2$) + ...+ ح(س$_ن$) = 1

وهو المطلوب.

مثال(6–25) : إذا كان ت(س) = 5 فأوجد قيمة ت(4س +3)

الحل : ت (4س + 3) = 4ت (س) + 3 بتطبيق النظرية أعلاه

$= 4 \times 5 + 3 = 23$

نظرية : إذا كانت القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي س هي ت(س) = μ فإن

ت (س–μ)= صفر.

البرهان : بتطبيق النظرية أعلاه وعلى اعتبار أن أ = 1 ، ب = μ فإن

ت (س – μ) = ت(س) – μ = μ – μ = صفر وهو المطلوب.

6–6–2 : تباين المتغير العشوائي س.

إن تباين المتغير العشوائي س سواء كان منفصلا أم متصلا والذي سنرمز له بالرمز تبا(س) أو $\sigma^2_س$ يمكن إيجاده من العلاقة التالية.

تبا(س) = ت [(س−μ)^2]

والانحراف المعياري والذي سنرمز له بالرمز σ_x = $\sqrt{\text{تبا(س)}}$

نظرية : إذا كانت القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي μ = ت(س) فإن تباين هذا المتغير العشوائي س

تبا(س) = ت(س^2) − μ^2=ت(س^2) − [ت(س)]^2

3-6-6 نظرية ذات الحدين وتوزيع ذات الحدين :

نظرية ذات الحدين : إن هذه عملت على حل مسائل رياضية لها حدين ومرفوعة لقوة نونية يصعب ايجاد مفكوكها كلما ازدادت قيمة القوة ن واستعين بهذه النظرية رياضياً لتأخذ الصورة

(أ + ب)^{ن} = $\sum_{ر=0}^{ن}$ $\binom{ن}{ر}$. (أ)^{ر} (ب)$^{ن-ر}$ حيث أ هو الحد الأول.

وقد استعين بهذه النظرية لاستخدامها في توزيع ذات الحدين.

وعليه فإن توزيع ذات الحدين في الأصل كانت نظرية رياضية

* إذا كانت التجربة تحتمل نتيجتين بحيث يمكن تسميتها إما حالة نجاح أو حالة فشل وسنرمز لاحتمال النجاح بالرمز ح واحتمال الفشل 1−ح.

وعند إجراء التجربةوتكرارها ن مرة فاذا رمزنا لعدد النجاحات بالرمز س فإن احتمال الحصول على نجاح معين يمكن إيجاده من العلاقة:

$$ح(س) = \binom{ن}{س} (ح)^{س} (1-ح)^{ن-س}$$

حيث س = 0 ، 1 ، 2 ، ... ، ن

خصائص المتغير العشوائي تنطبق عليه توزيع بيرنولي :

(1) يمكن تقسيم الأحداث إلى نجاح أو فشل.

(2) الأحداث مستقلة أي حدوث الأول لا يؤثر على حدوث الأخرى.

(3) إذا كان احتمال النجاح (ح) فإن احتمال الفشل (1-ح)

(4) الأحداث تتكرر (ن) من المرات.

(5) احتمال النجاح ثابت طيلة التجربة.

* وان للمتغير الغشوائي (س) الذي يحقق شروط تجربة بيرونولي له التوزيع الاحتمالي

$$ح(س) = \binom{ن}{س} (ح)^{س} (1-ح)^{ن-س}$$

س- 0، 1، 2، ....، ن.

وهذا ما نسميه بتوزيع ذات الحدين .

مثال (6-25) : أسرة لديها خمسة أطفال فـإذا كـان المتغـير العشـوائي س يمثـل عـدد الذكور في الأسرة والمطلوب :

1) هل المتغير العشوائي يحقق شروط تجربة ذات الحدين ثم أوجد الدالة الاحتمالية التي تحكم المتغير العشوائي.

2) أوجد احتمال أن يكون لدى الأسرة ثلاثة أطفال ذكور.

3) احتمال أن يكون للعائلة بين طفل ذكر وثلاثة أطفال ذكور.

4) احتمال أن لا يكون للعائلة أطفال ذكور.

الحل : س = عدد الذكور في الأسرة.

$$ح = 1 - ح = \frac{1}{2}$$

(1) نعم تحقق الشروط والدالة الاحتمالية التي تحكم س هي :

$ح(س) = \binom{5}{س}\left(\frac{1}{2}\right)^{س}\left(\frac{1}{2}\right)^{ن-س}$ حيث س = 0، 1، 2، 3، 4، 5 أي $0 \geq س \geq 5$

(2) احتمال أن يكون للعائلة ثلاثة أطفال ذكور هو:

$$ح\,(س=3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = \frac{1\times2\times3\times4\times5}{1\times2\times1\times2\times3}\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= 10\times\frac{1}{32} = \frac{10}{23}$$

(3) $ح(1\geq س\geq 3) = ح(1 \geq س \geq 3) = \binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2} + \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2} + \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$

نجد أولا المعاملات.

$$\binom{5}{2} = \frac{1\times2\times3\times4\times5}{1\times2\times3\times1\times2} = 10$$

$$\binom{5}{1} = \frac{1\times2\times3\times4\times5}{1\times2\times3\times4\times1} = 5$$

$\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$ خاصية

ثم نكتب الاحتمالات المطلوبة.

$$= \frac{5}{32} + \frac{10}{32} + \frac{10}{32} = \frac{25}{32}$$

(4) $ح(س=صفر) = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{5} = \frac{1}{32}$ أي أن احتمال أن لا يكون للعائلة أطفال

ذكور هو $\frac{1}{32}$.

مثال (6-26): في تجربة القاء قطعة نقود مرتين أوجد التوقع الرياضي للمتغير العشوائي الذي يمثل ظهور صورة وكذلك تباينه.

الحل: المتغير العشوائي س يأخذ القيم التالية:

س = 0 ، 1، 2

حيث أن: 0: تمثل عدد المرات لظهور الصورة وهو الصفر

1: تمثل ظهور الصورة مرة واحدة

2: تمثل ظهور الصورة مرتين

وعليه يكون المتغير العشوائي أخذ القيم التالية واحتمالاتها.

س	0	1	2
ح(س)	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

وبتطبيق العلاقة أعلاه فإن:

ت (س) = $0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{2}{4} + 2 \times \frac{1}{4} = 0 + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{4}{4} = 1$

ت $(س)^2$ = $0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{2}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{6}{4}$

∴ تبا (س) ت $(س)^2$ - [ت(س)]^2 = $\frac{6}{4} - (1)^2 = \frac{6}{4} - \frac{4}{4} = \frac{2}{4} = 0.5$

تمارين عامة على الاحتمالات

س1: من الشكل جانبا وبالاستفادة من البيانات التالية:

ح(أ$_1$)= ح(أ$_2$)= ح(أ$_3$)= $\frac{1}{4}$

ح(أ$_4$) =ح(أ$_5$)= ح(أ$_6$)= $\frac{1}{8}$

ح(أ$_7$)= ح(أ$_8$)= $\frac{1}{16}$

والمطلوب ايجاد ما يلي:

1) ل(أ$_1$) 2) ح($\overline{أ}$) 3) ح(أ)

4) ح(أ$\cup$ب) 5) ح(أ$_1\cap$أ$_2$) 6) ح(أ$_1$/أ$_2$)

7) ح(أ$_2$/أ$_1$) 8) ح($\overline{أ}_1\cap\overline{أ}_2$) 9) ح$\overline{(أ_1\cap أ_2)}$

10) ح$\overline{(أ_1\cap أ_2)}$

س2 : على فرض ان ح(أ$_1$)=0.3 ح(أ$_2$)=0.5 ح(أ$_1\cup$أ$_2$)=0.7 اوجد ما يلي:-

1) ح(أ$_1\cap$أ$_2$) 2) ح($\overline{أ}_1$) 3) ح($\overline{أ}_2$)

4) ح($\overline{أ}_1\cup\overline{أ}_2$) 5) ح$\overline{(أ_1\cup أ_2)}$

6) ح$\overline{(أ_1\cap أ_2)}$ 7) ح(أ$_1\cup$أ$_2$)

س3 : في تجربة القاء حجر النرد مرة واحدة اذا كانت الاحداث التالية:-

أ$_1$={1،6} ، أ$_2$={1،3،5} اوجد ما يلي:

1) ح(أ$_1\cap$أ$_2$) 2) ح(أ$_1\cup$أ$_2$) 3) ح(أ$_1$)

4) ح$(\bar{أ}_2)$ 5) ح$(أ_1/أ_2)$ 6) ح$(أ_2/أ_1)$

7) ح$(\bar{أ}_1/\bar{أ}_2)$ 8) ح$(أ_1 \cup أ_2)$ 9) ح$(\bar{أ}_1 \cap \bar{أ}_2)$

10) ح$\overline{(أ_1 \cap أ_2)}$ 11) هل الحدثان مستقلين

س4: في تجربة القاء قطعة نقود منتظمة ثم حجر نرد منتظم مرة واحدة اوجد الاحتمالات التالية:-

1- الحدث الذي يمثل ظهور كتابة على الوجه العلوي لقطعة النقود.

2- الحدث الذي يمثل ظهور العدد 3 على الوجه العلوي لحجر النرد.

3- الحدث الذي يمثل عدم ظهور العدد 3 على الوجه العلوي لحجر النرد.

4- الحدث الذي يمثل ظهور صورة على الوجه العلوي لقطعة نقود وعدد اقل من 3 على حجر النرد.

5- الحدث الذيس يمثل ظهور كتابة على الوجه العلوي لقطعة نقود والعدد 4 او 6 على الوجه العلوي لحجر النرد.

س5: ليكن ف=$\{أ_1، أ_2، أ_3، أ_4، أ_5، أ_6، أ_7\}$ ولتكن احتمالات الاحداث البسيطة معينة كما يلي: ح$(أ_1)$=ح$(أ_2)$=ح$(أ_6)$

ح$(أ_3)$=2ح$(أ_2)$=$\frac{1}{2}$ح$(أ_1)$

ح$(أ_5)$= $\frac{1}{2}$ح$(أ_7)$= $\frac{1}{2}$ح$(أ_1)$

اوجد ح$(أ_1)$، ح$(أ_2)$، ح$(أ_3)$، ح$(أ_4)$، ح$(أ_5)$، ح$(أ_6)$، ح$(أ_7)$

س6 : اذا كانت $أ_1$، $أ_2$، $أ_3$ ثلاثة احداث معينة لفضاء عيني وكانت احتمالات الوحدات كما يلي : ح$(أ_1)$= 2ح$(أ_2)$، ح$(أ_3)$=$\frac{1}{2}$ح$(أ_1)$ اوجد

$ح(أ_1)$، $ح(أ_2)$، $ح(أ_3)$، $ل(ح_1 \cap ح_2)$ ، $ل(أ_1 \cup أ_3)$

س 7: سحبت كرة عشوائيا من صندوق به 3 كرات بيضاء، 6 كرات حمراء، 8 زرقاء ، 9 خضراء اوجد الاحمالات التالية:-

1- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة بيضاء.

2- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة خضراء.

3- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة زرقاء.

4- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة حمراء.

5- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة اما حمراء او خضراء.

6- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة اما بيضاء او خضراء.

7- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة ليست خضراء او ليست بيضاء.

س 8: كيس به ثلاث كرات بيضاء، 2 صفراس، 4 حمراء، 5 زرقاء، سحبت منه كرتان عشوائيا احسب الاحتمالات التالية:-

1- كلا الكرتان زرقاوان

2- واحدة بالضبط زرقاء

3- على الاقل واحدة زرقاء.

س 9: اذا كان $أ_1$، $أ_2$ حدثان معينان وكان $ح(أ_1 \cup أ_2) = \frac{5}{8}$

$ح(أ_1)ة = \frac{1}{2}$ $ح(أ_1 \cap أ_2) = \frac{1}{3}$ احسب الاحتمالات التالية:

1) $ح(\overline{أ}_2)$، $ح(أ_1 \cap أ_2)$ 2) $ح(أ_2)$ 3) $ح(\overline{أ_2})$

4) $ح(أ_1/أ_2)$ 5) $ح(\overline{أ_1 \cup أ_3})$ 6) $ح(\overline{أ}_1 \cup \overline{أ}_3)$

الوحدة السابعة

الارتباط والانحدار

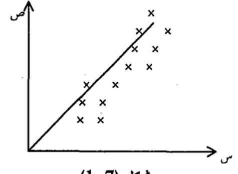
1-7) طريقة جداول الانتشار وعلاقتها بالارتباط

حتى نستطيع ان نتعرف على مفهوم الارتباط من خلال جداول الانتشار لا بد من التعرف اولا على كيفية تكون جدول الانتشار ويتم من خلال الخطوات التالية.

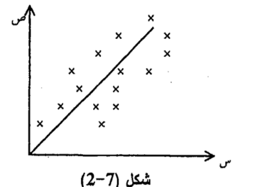
- نرسم احداثيين الافقي والرأسي حيث يمثل على المحور الافقي الظاهرة س وعلى المحور الرأسي الظاهرة ص.

- نعين النقاط التي يمثل فيها الاحداثي السيني قيمة من قيم المتغير س والاحداثي الصادي قيمة من قيم المتغير ص.

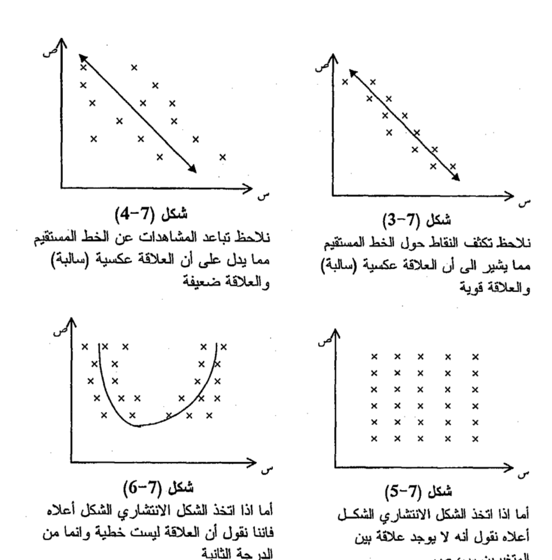
- نحاول تحرير منحنى من اغلب النقاط بحيث يتوسط القيم ونلاحظ بعد توزيع النقاط الاشكال الانتشارية التالية:



شكل (7-1)
نلاحظ تكثف المشاهدات حول الخط المستقيم مما يشير الى أن العلاقة خطية والارتباط ايجابي (طردي) قوي



شكل (7-2)
نلاحظ تباعد المشاهدات عن الخط المستقيم مما يدل على أن العلاقة خطية طردية (موجبة) ولكنها ضعيفة



شكل (7–3)
نلاحظ تكثف النقاط حول الخط المستقيم مما يشير الى أن العلاقة عكسية (سالبة) والعلاقة قوية

شكل (7–4)
نلاحظ تباعد المشاهدات عن الخط المستقيم مما يدل على أن العلاقة عكسية (سالبة) والعلاقة ضعيفة

شكل (7–5)
أما اذا اتخذ الشكل الانتشاري الشكل أعلاه نقول أنه لا يوجد علاقة بين المتغيرين س، ص

شكل (7–6)
أما اذا اتخذ الشكل الانتشاري الشكل أعلاه فاننا نقول أن العلاقة ليست خطية وانما من الدرجة الثانية

ومن خلال الأشكال سالفة الذكر نلاحظ أننا عبرنا عن العلاقة بين المتغيرين ونوعها وأننا استطعنا أن نعبر عن القوة أو الضعف للعلاقة من خلال جداول الانتشار.

7–2) معامل الارتباط وخصائصه

كما اسلفنا بأنه يمكن التعبير عن العلاقة بين المتغيرين بمقياس هو معامل الارتباط والذي سنرمز له بالرمز (ر) ويأخذ قيمة عددية تتراوح بين $-1 \leq$ ر ≤ 1 واذا وجد قيمة اكبر او اصغر من هذه الحدود دلالة على ان هناك خطأ حسابي قد حصل،

وللمعامل دلالات نوردها في ما يلي لتفسير العلاقة بين المتغيرين.

1) اذا كانت ر = -1 فان العلاقة بين المتغيرين تكون عكسية تامة.

2) اذا كانت -1 < ر < 0 فان العلاقة تكون علاقة عكسية.

3) اذا كانت ر = صفر. فهذا يعني انه لا وجود لأي علاقة بين المتغيرين س، ص.

4) اذا كانت 0 < ر < 1 فهذا يعني انه يوجد علاقة ايجابية تقوى كلما اقتربنا من الواحد صحيح.

5) عندما تكون ر = 1 فان العلاقة تكون علاقة تامة ايجابية.

7-2-1) معامل ارتباط بيرسون

لايجاد معامل الارتباط باستخدام طريقة بيرسون نتبع الخطوات التالية:

- نجد $\sum$ س، $\sum$ ص
- نجد $\sum$ س^2 أي مربع كل مشاهدة من س ثم المجموع.
- نجد $\sum$ ص^2 أي مربع كل مشاهدة في ص
- نجد معامل الارتباط من العلاقة

$$ر = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر ص_ر - \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر \times \sum_{ر=1}^{ن} ص_ر}{ن}}{\sqrt{\left(\sum_{ر=1}^{ن} س_ر^2 - \frac{\left(\sum_{ر=1}^{ن} س_ر\right)^2}{ن}\right)\left(\sum_{ر=1}^{ن} ص_ر^2 - \frac{\left(\sum_{ر=1}^{ن} ص_ر\right)^2}{ن}\right)}} \quad \ldots\ldots(1-7)$$

مثال (7-1): اذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية للمتغيرين س، ص كما في الجدول (7-1)

س	1	2	3	4	5	المجموع
س	1	2	3	4	5	15
ص	3	6	9	12	15	45

جدول (7-1)

المطلوب: ايجاد معامل الارتباط باستخدام معامل ارتباط بيرسون.

الحل: نشكل جدول الحل (7-2) والذي يحوي جميع الحسابات المطلوبة للحل.

الرقم	س	ص	س ص	$س^2$	$ص^2$
1	1	3	3	1	9
2	2	6	12	4	36
3	3	9	27	9	81
4	4	12	48	16	144
5	5	15	75	25	225
المجموع	15	45	165	55	495

جدول (7-2)

من البيانات اعلاه نجد قيمة ر

$$ر = \frac{165 - \frac{45 \times 15}{5}}{\sqrt{\left(\frac{45\times 45}{5} - 495\right)\left(\frac{15\times 15}{5} - 55\right)}} = \frac{165 - 135}{\sqrt{(495 - 405)(55 - 45)}}$$

$$= \frac{30}{\sqrt{90 \times 10}} = \frac{30}{\sqrt{900}} = \frac{30}{30} = 1$$

ر=1 أي ان الارتباط ارتباط ايجابي تام

مثال(7–2) : البيانات التالية تمثل قيم س، ص مرتبة في الجدول (6–3)

					المجموع
س	3	7	4	5	7	26
ص	2	6	8	6	8	30

جدول (7–3)

المطلوب ايجاد معامل الاتباط لهذه البيانات

الحل: نكون الجدول (6–4) والمحتوي على البيانات المطلوبة لحل السؤال

الرقم	س	ص	س ص	$س^2$	$ص^2$
1	3	2	6	9	4
2	7	6	42	49	36
3	4	8	32	16	64
4	5	6	30	25	36
5	7	8	56	49	64
المجموع	26	30	166	148	204

جدول (7–4)

من البيانات اعلاه نجد قيمة ر من العلاقة

$$ر = \frac{166 - \frac{30\times 26}{5}}{\sqrt{\left(\frac{30\times 30}{5} - 204\right)\left(\frac{26\times 26}{5} - 148\right)}} = \frac{166-156}{\sqrt{(204-180)(148-135.2)}}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{24\times 12.8}} = \frac{10}{\sqrt{307.2}} = \frac{10}{17.53} = 0.57$$

أي ان الارتباط بين المتغيرين س، ص ايجابي (طردي) متوسط

مثال (7–3): البيانات التالية تمثل قيم المتغيرين س ، ص كما في الجدول (7–5) .

						المجموع
س	4	7	9	12	15	47
ص	11	9	5	4	2	31

جدول (7–5)

المطلوب ايجاد معامل الارتباط بين المتغيرين س، ص

الحل: نشكل الجدول (7–6) والمحتوي على جميع البيانات المطلوبة للحل

الرقم	س	ص	س ص	$س^2$	$ص^2$
1	4	11	44	16	121
2	7	9	63	49	81
3	9	5	45	81	25
4	12	4	48	144	16
5	15	2	30	225	4
المجموع	47	31	230	515	247

جدول (7–6)

من البيانات اعلاه نطبق العلاقة

$$ر = \frac{\frac{31\times 47}{5}-230}{\sqrt{\left(\frac{31\times 31}{5}-247\right)\left(\frac{47\times 47}{5}-515\right)}} = \frac{291.4-230}{\sqrt{(192.2-247)(441.8-515)}}$$

$$= \frac{61.4-}{\sqrt{54.8\times 73.2}} = \frac{61.4-}{\sqrt{4011.36}}$$

$$= \frac{61.4-}{63.34} = 0.97-$$ وهذا ارتباط سلبي قوي

7-2-2) ايجاد معامل الارتباط بطريقة الانحراف المعياري

لإيجاد معامل الإرتباط بهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية :

- نجد $\sum (س_ر - \overline{س})(ص_ر - \overline{ص})$

- نجد $ع_س$ ثم $ع_ص$ او قد تكون في بعض الاسئلة معطاة

- نجد معامل الارتباط من العلاقة التالية.

$$ر = \frac{1}{ن} \frac{\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \overline{س})(ص_ر - \overline{ص})}{ع_س . ع_ص} \qquad \text{(2-7)}$$

مثال (7-4): من البيانات المعطاة ادناه اوجد معامل الارتباط اذا كان:

$\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \overline{س})(ص_ر - \overline{ص}) = 47$ ، $ع_س = 16$ ، $ع_ص = 5$ حيث ن=5.

الحل: نطبق العلاقة $ر = \frac{1}{5} . \frac{47}{5 \times 16} = \frac{47}{400}$

∴ ر= 0.12 وهذا ارتباط ايجابي ضعيف.

7-2-3) معامل ارتباط سبيرمان للرتب:

كثيرا ما يستعمل هذا المعامل في البيانات الوصفية التي يستحيل عندها استخدام البيانات العددية بطريقة بيرسون وكذلك ايضا يستخدم في البيانات الرقمية لتسهيل العمليات الحسابية. لذا نلجأ لتحويل البيانات الوصفية الى عددية قابلة للحل.

ولاستخدام هذه الطريقة نتبع الخطوات التالية.

- نجد تراتيب البيانات المعطاة سواءً كانت وصفية او رقمية لكل من المتغيرين س، ص ونرمز لهما بالرموز سَ ، صَ .

- نجد ف = سَ – صَ . أي نجد الفرق بين التراتيب المناظرة.

– نأخذ مربع ف ونطبق العلاقة :

$$ر = 1 - \frac{6 . \sum ف^2}{ن(ن^2-1)} \quad \text{.......................}(3-7)$$

مثال (7–5) : البيانـات التالية تعطـي تقـادير عشـرة موظفـين في احـدى الشـركات وكانت مرتبة كما في الجدول (7–7)

س(الأول)	جيد	جيد جدا	مقبول	جيد جدا	جيد	ممتاز	ممتاز	ضعيف	مقبول	جيد جدا
ص(الثاني)	مقبول	ممتاز	ضعيف	ممتاز	جيد جدا	جيد جدا	جيد	مقبول	جيد	جيد

جدول (7–7)

الحل: نشكل الجدول (7–8) يشمل جميع البيانات المطلوبة للحل.

الرقم	س	ص	سَ	صَ	ف=سَ–صَ	ف^2
1	جيد	مقبول	6.5	8.5	2–	4.00
2	جيد جدا	ممتاز	4	1.5	2.5	6.25
3	مقبول	ضعيف	8.5	10	1.5	2.25
4	جيد جداً	ممتاز	4	1.5	2.5	6.25
5	جيد	جيد جدا	6.5	3.5	3	9.00
6	ممتاز	جيد جدا	1.5	3.5	2–	4.00
7	ممتاز	جيد	1.5	6	4.5–	20.25
8	ضعيف	مقبول	10	8.5	1.5	2.25
9	مقبول	جيد	8.5	6	1.5	2.25
10	جيد جدا	جيد	4	6	2–	4.00
المجموع						60.50

جدول (7–8)

– ترتيب التقادير اعلاه كما ورد في سَ، صَ

- نجد ف = سَ−صَ

- نجد مربع الفروق والمجموع أي $\sum_{ر=1}^{ن} ف^2_ر$

- ثم نطبق العلاقة

$$ر = 1 - \frac{6\sum_{ر=1}^{ن} ف^2_ر}{ن(ن^2-1)} = 1 - \frac{6 \times 60.5}{10(100-1)}$$

$= 1 - \frac{363}{990} = 1 - 0.37 = 0.63$ وهذا يدل على ان الارتباط جيد

ملاحظات على الحل.

- عندما كان لدينا قيم متكررة كنا نأخذ ترتيب كل قيمة متكررة التصاعدي ثم نجمع هذه التراتيب ونأخذ متوسطها الحسابي فيكون هو ترتيب كل قيمة في سَ. فمثلاً عند ترتيب قيم س لاحظنا ان التقدير ممتاز تكرر مرتين كان ترتيبهما التصاعدي 1،2 فيكون الترتيب لكل تقدير هو $\frac{2+1}{2} = 1.5$ فيوضع في عمود سَ العدد 1.5 امام التقادير ممتاز وهكذا نضع قيم سَ وصَ لباقي التقادير.

مثال (7−6): البيانات التالية تمثل درجات 10 طلاب في مبحثي الاحصاء والرياضيات وهي كما في الجدول (7−9)

درجة الاحصاء س	85	75	90	95	80	88	90	60	75	87
درجة الرياضيات ص	80	85	75	75	80	72	85	65	70	83

جدول (7−9)

اوجد معامل ارتباط سبيرمان

الحل: نكون الجدول (7−10) والذي يحتوي على جميع البيانات المطلوبة

درجة الاحصاء(س)	درجة الرياضيات(ص)	رتبة س=سَ	رتبة ص=صَ	ف=سَ-صَ	ف^2
85	80	6	5.5	0.5	0.25
75	85	8.5	2	6.5	42.25
90	85	2.5	2	0.5	0.25
95	75	1	7	6.0-	36.00
80	80	7	5.5	1.5	2.25
88	72	4	8	4-	16.00
0	85	2.5	2	0.5	0.25
60	65	10	10	صفر	صفر
75	70	8.5	9	0.5-	0.25
87	83	5	4	1	1.0
					98.5

جدول (7-10)

بعد ايجاد هذه البيانات نطبق العلاقة التالية

$$ر = 1 - \frac{6\sum_{ر=1}^{ن} ف_ر^2}{ن(ن^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6 \times 98.5}{10(100-1)} = 1 - \frac{591}{990} = 1 - 0.6 = 0.4$$

∴ الارتباط بين المتغيرين س،ص ضعيف وهذه الطريقة تسمى طريقة سبيرمان للرتب.

الانحدار

3-7) مفهوم الانحدار:

هو ايجاد معادلة رياضية تعبر عن العلاقة بين المتغيرين س،ص تستعمل للتنبؤ عن قيم سابقة وقيم مستقبلية ل ص. او س حسب المعلوم منهما وتكون هذه المعادلة الرياضية خطية ، وقد تكون بدرجة ثانية أو ثالثة ولكن سنتناول هنا الخطية منها فقط وتكون بصورتين.

أ) اذا كان الانحدار من ص على س فان المعادلة هي

$$\text{ص} = \text{أ}\text{س} + \text{ب} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4-7)$$

المطلوب هو التعرف على قيم أ، ب لصياغة المعادلة ونسمي أ: معامل الانحدار او ميل خط الانحدار، وهو قيمة تقديرية، ب=هو نقطة تقاطع خط الانحدار مع المحور الرأسي ويمكن ايجاد قيم أ. ب من العلاقتين

$$\text{أ} = \frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}}\text{ص}_{\text{ر}} - \frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} \cdot \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ر}}}{\text{ن}}}{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}}^{2} - \frac{\left(\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}}\right)^{2}}{\text{ن}}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5-7)$$

ولايجاد ب نجد ها من العلاقة

$$\text{ب} = \overline{\text{ص}} - \text{أ}\overline{\text{س}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6-7)$$

حيث $\overline{\text{س}}$، $\overline{\text{ص}}$ هما المتوسط الحسابي للظاهرة س، الظاهرة ص.

ب) معادلة انحدار س على ص فاننا نكون المعادلة التالية :

$$\text{س} = \text{أَ}\text{ص} + \text{بَ} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7-7)$$

ولايجاد قيم أ، بَ من العلاقتين :

$$أ' = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر ص_ر - \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر . \sum_{ر=1}^{ن} ص_ر}{ن}}{\sum_{ر=1}^{ن} ص_ر^2 - \frac{\left(\sum_{ر=1}^{ن} ص_ر\right)^2}{ن}} \quad ....(7-9)$$

ولايجاد $بَ = \bar{س} - أ' \bar{ص}$ ....(7-10)

7-3 ولايجاد العلاقة الرياضية بين معاملي الانحدار ومعامل الارتباط فاننا نجدها كما يلي:

$ر^2 = أ \times أ'$. أو $ر = \sqrt{أ \times أ'}$ ....(7-10)

ولتوضيح المفاهيم السابقة نورد الامثلة التالية:

مثال (7-7): البيانات التالية تمثل اجور ونفقات خمسة عمال من عمال شركة ما مرتبة في الجدول (7-11)

اجور اسبوعية س	20	15	18	20	25
نفقات اسبوعية ص	15	14	18	15	20

جدول (7-11)

والمطلوب ايجاد .

أ) معامل ارتباط بيرسون

ب) معادلة انحدار ص/س أي انحدار ص على س باستخدام القانون العام.

جـ) معادلة انحدار س/ص أو س على ص.

د) معامل الارتباط من معامل انحدار ص على س ، س على ص ثم قارن نتيجة د مع نتيجة أ.

هـ) اوجد نفقات عامل ما اذا كان مرتبة 40 دينار.

الحل: نكون الجدول (7-12) الذي يشمل جميع البيانات المطلوبة للحل

اجور اسبوعية		نفقات المبوبة ص	س ص	$س^2$	$ص^2$
20		15	300	400	225
15		14	210	225	196
18		18	324	324	324
20		15	300	400	225
25		20	500	625	400
المجموع	98	82	1634	1974	1370

جدول (6-12)

أ) نجد معامل ارتباط بيرسون من العلاقة (7-1)

$$ر = \frac{\frac{82 \times 98}{5} - 1634}{\sqrt{\left(\frac{82 \times 82}{5} - 1370\right)\left(\frac{98 \times 98}{5} - 1974\right)}}$$

$$ر = \frac{1607.2 - 1634}{\sqrt{(1344.8 - 1370)(1920.8 - 1974)}}$$

$$ر = \frac{26.8}{\sqrt{25.2 \times 53.2}} = \frac{26.8}{\sqrt{1340.64}} = \frac{26.8}{36.61}$$

= 0.73 وهذا معامل ارتباط قوي نوعاما.

ب) لايجاد معادلة انحدار ص على س نجد

$$أ = \frac{1634 - \frac{98 \times 98}{5}}{1974 - \frac{98 \times 98}{5}}$$

$$= \frac{1634 - 1607}{1974 - 1920.8} = \frac{26.8}{53.2} = 0.5 \Leftarrow أ = 0.5$$

ولايجاد ب نجدها من العلاقة ب = $\bar{ص}$ − أ$\bar{س}$ لذا نجد أولاً الوسط الحسابي لكل من المتغيرين س ، ص

$\bar{س}$ = 19.6 ، $\bar{ص}$ = 16.4

نجد قيمة ب من العلاقة

ب = $\bar{ص}$ − أ $\bar{س}$ = 16.4 − 0.5×19.6 = 16.4 − 9.80 = + 6.6

∴ معادلة انحدار ص/س تصبح على الصورة.

ص = 0.5 س+(6.6) = 0.5 س + 6.6

جـ) ولايجاد معادلة انحدار س على ص نجد اولاً

$$أ' = \frac{1634 - \frac{82 \times 98}{5}}{1370 - \frac{82 \times 82}{5}} = \frac{1634 - 1607.2}{1370 - 1344.8} = \frac{26.8}{25.2} = 1.06$$

∴ أ' = 1.06 ثم نجد ب من العلاقة

ب' = $\bar{س}$ − أ' $\bar{ص}$ = 19.6 − 1.06 × 16.4

= 19.6 − 17.380 = 2.22

∴ المعادلة المطلوبة تكون

س = 1.06ص+(2.22) ⟸ س = 1.06ص + 2.22

د) نجد معامل الارتباط من العلاقة

$ر^2$=أ×أ َ واصبح لدينا معلوماً كل من أ، أ َ

$ر^2$ =1.06×0.5

فيكون معامل الارتباط ر= $\sqrt{0.53}$

ر = 0.73

نلاحظ ان الجواب الذي حصلنا عليه بطريقة بيرسون هو نفس الجواب الذي حصلنا عليه بهذه الطريقة.

هـ) نستطيع التنبؤ عن الجواب من العلاقة

ص= 0.5س+6.6 ونعوض عن س بالقيمة المعطاة

ص=0.5س+ 6.6=20 + 6.6 = 26.6 دينار وهو المطلوب

ايجاد معادلة انحدار ص على س باستخدام المربعات الصغرى

الصورة العامة لمعادلة انحدار ص على س ص= م س + جـ

$\sum$ص=م .$\sum$س+ن جـ بأخذ المجموع لجميع الأطراف

82=98 م + 5 جـ .... (1)

س ص = م $س^2$ + و س نضرب جميع أطراف المعادلة الأصلية في س

$\sum$س ص= م$\sum$ $س^2$ + جـ$\sum$س

1634=1974م+98جـ

82=98م+5جـ .... (2)

8170=9870 م+490جـ

± 8036=±9604م ±490جـ بالطرح

134=266م

$$م=\frac{134}{266}=0.5$$

وبالتعويض عن م في أي من المعادلات ولتكن معادلة (1)

82=8×0.5+5جـ

5جـ=82−49

5جـ = 33 ⇐ = $\frac{33}{5}$ =6.6

∴ معادلة انحدار ص على س هي

ص=0.5س+6.6

أمثلة اضافية

مثال(7−8): الجدول (6−13) يمثل معدل درجات خمسة طلاب في المرحلة الثانوية ومعدلاتهم في السنة الاولى في الكلية

معدل الثانوية(س)	85	72	64	82	65
معدل السنة الأولى(ص)	91	81	73	71	67

جدول (7−13)

والمطلوب

1) رسم لوحة الانتشار للمتغيرين س، ص

2) ايجاد معامل الارتباط بطريقتين

3) اوجد معامل الارتباط من العلاقة التي تربط الارتباط بالانحدار.

4) قدر معدل احد الطلاب في الثانوية العامة اذا كان معدله في السنة الاولى 88.

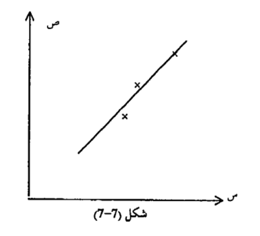
5) قدر معدل طالب في السنة الاولى اذا كان معدله في الثانوية العامة 76.

الحل: نكون جدول الحل (7-14).

	س	ص	س ص	$س^2$	$ص^2$	سَ رتبة س	صَ رتبة ص	ف	$ف^2$	
	85	91	7735	7225	8281	1	1	0	0	72
	72	81	5832	5184	6561	3	2	1	1	$\bar{س} = \frac{368}{5} = 73.6$
	64	73	4672	4096	5329	5	3	2	4	$\bar{س} = \frac{383}{5} = 76.6$
	82	71	5822	6724	5041	2	4	-2	4	
	65	67	4355	4225	4489	4	5	-1	1	
وع	368	383	28416	27454	34190				10	

جدول (7-14)

(1) نبدأ برسم لوحة الانتشار



شكل (7-7)

والخط المبين يمر باغلب النقط

(2)أ- معامل ارتباط بيرسون نجده من العلاقة التالية

$$ر = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر ص_ر - \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر \sum_{ر=1}^{ن} ص_ر}{ن}}{\sqrt{\left(\sum_{ر=1}^{ن} س_ر^2 - \frac{\left(\sum_{ر=1}^{ن} س_ر\right)^2}{ن}\right)\left(\sum_{ر=1}^{ن} ص_ر^2 - \frac{\left(\sum_{ر=1}^{ن} ص_ر^2\right)^2}{ن}\right)}}$$

$$= \frac{28416 - \frac{383 \times 368}{5}}{\sqrt{\left(\frac{383 \times 383}{5} - 29701\right)\left(\frac{368 \times 368}{5} - 27454\right)}} = \frac{28416 - 28188.8}{\sqrt{(27454 - 27084.8)(- 29337.8)}}$$

$$= \frac{227.2}{\sqrt{363.2 \times 369.2}} = \frac{227.2}{366.1} = 0.62$$

ب-نجد معامل ارتباط سبيرمان كطريقة اخرى.

$$ر = 1 - \frac{6 \sum_{ر=1}^{ن} ف_ر^2}{ن(ن^2-1)} = 1 - \frac{6 \times 10}{5 \times 24} = 1 - \frac{60}{120} = 1 - 0.5 = 0.50$$

3) ان معادلة خط انحدار ص على س هي

ص= أس+ب.

واذا تحديد كل من أ، ب يتم ايجاد المعادلة المطلوبة . وليتم ذلك نجد أ من العلاقة

$$ا = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر ص_ر - \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر \sum_{ر=1}^{ن} ص_ر}{ن}}{\left(\sum_{ر=1}^{ن} س_ر^2 - \frac{\left(\sum_{ر=1}^{ن} س_ر\right)^2}{ن}\right)} = \frac{227.2}{369.2} = 0.62$$

نجد ب من العلاقة ب= $\overline{ص}$ -أ $\overline{س}$ =

=76.6−0.62×73.6=76.6−45.6=31

المعادلة المطلوبة هي ص= 0.62س+31

أما معادلة انحدار س على ص فهي كما يلي :

س= أَص+بَ وبايجاد الثوابت أ، بَ نصل الى المعادلة المطلوبة نجد أَ من العلاقة التالية

$$أ' = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر ص_ر - \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر \sum_{ر=1}^{ن} ص_ر}{ن}}{\left(\sum_{ر=1}^{ن} ص_ر^2 - \frac{\left(\sum_{ر=1}^{ن} ص_ر\right)^2}{ن}\right)} = \frac{227.2}{363.3} = 0.63$$

نجد من العلاقة بَ = $\overline{س}$ -أَ $\overline{ص}$ وبالتعويض عن القيم المعطاة

بَ = 73.6− 0.63 × 76.6= 73.6− 48.3 = 25.3

ونكون المعادلة المطلوبة س=0.63ص+25.3

جـ) لإيجاد معامل الارتباط من العلاقة

$$ر = \sqrt{أ \times أ'} = \sqrt{0.62 \times 0.63} = 0.621$$

5) لتقدير المعدل في الثانوية العامة نعوض في المعادلة س/ص.

س = 0.63×88+25.3 = 55.44+25.36 = 80.74

6) لتقدير المعدل في السنة الأولى نعوض في معادلة ص/س.

ص = 0.62×76+31 = 78.12

تمارين عامة على الوحدة السابعة

1-البيانات التالية تمثل ارقام المشاهدات س، ص كما في الجدول التالي

س	2	5	7	10	12	13	15
ص	4	10	14	20	24	26	30

والمطلوب: ايجاد نوع الارتباط بين المتغيرين مع ذكر نوعه ووصفه.

2- اوجد معامل ارتباط بيرسون لقيم المشاهدات المبوبة في الجدول التالي.

س	14	8	10	12	14	16
ص	12	8	7	5	3	1

3- من البيانات المرتبة بالجدول.

س	2	6	8	10	12	14
ص	1	2	3	4	5	6

والمطلوب 1) ايجاد معامل ارتباط بيرسون

2) ايجاد معامل ارتباط سبيرمان للرتب.

4- من البيانات المعطاة

$\sum$س ص=85، $\sum$س=20، $\sum$ص=30، ن=5 $\sum$س^2=165، $\sum$ص^2=200

اوجد معامل الارتباط للمتغيرين بطريقة بيرسون.

5- من البيانات التالية اوجد معامل ارتباط سبيرمان للرتب اذا كان

$\sum$ف^2=55.5، ن= 6

س6: في مايلي علامات مجموعة مؤلفة من 5 طلاب في امتحاني الرياضيات والاحصاء س، ص على التوالي.

س	86	68	74	80	62
ص	80	65	75	75	65

المطلوب: 1) حساب معامل ارتباط بيرسون 2) معامل ارتباط سبيرمان.

3) معادلة الانحدار ص=أ+ب س 4) اذا علم ان احد الطلبة قد حصل علامة (78) في الرياضيات اوجد علامة الطالب في الاحصاء.

5) ايجاد علامة الطالب في الرياضيات اذا كانت علامته في الاحصاء هي 60.

6) رسم شكل الانتشار بناءً على المشاهدات

7) رسم خط الانحدار .

8) تفسير معاملي أ، ب.

الفصـــل الثامن

السلاسل الزمنية

8-1) تمثيل السلاسل الزمنية

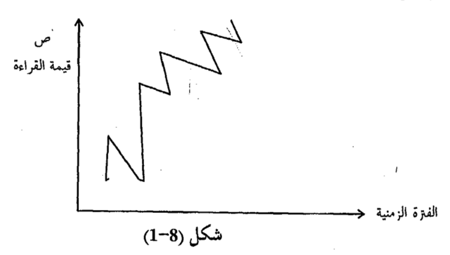
السلسلة الزمنية : مجموعة مشاهدات حول ظاهرة معينة أخذت بترتيب زمني معين عادة ما يكون هذا الترتيب فيه تساوي الفترات الزمنية مثل الساعات، الايام، الاشهر، او السنوات المتتابعة.

امثلة متنوعة على السلاسل الزمنية.

* المبيعات اليومية في مركز بيع الكتب لمدة شهر.
* قراءة درجات حرارة المريض في ساعة لمدة يوم واحد.
* قراءات الانتاج الشهري لمدة سنة في شركة الادوية العربية.
* الانتاج الشهري من البترول لدولة الكويت ولعدة سنوات.

كل هذه القراءات وتتابعها الزمني جميعها تمثل سلسلة زمنية.

ويمكن تمثيلها بيانياً لأن كل قراءة تمثل زوجا من النقاط كما في شكل (8-1)



شكل (8-1)

8-2) معامل الخشونة والمعدلات المتحركة

8-2-1 معامل الخشونة :

في هذا البند يبرز سؤال وهو ما المقصود من تحليل السلسلة الزمنية؟ وللاجابة نقول بان المقصود من تحليل السلسة الزمنية هو.

1) معرفة التغيرات التي تطرأ على السلسلة خلال الفترات المتساوية التي اخذت عندها قراءة المشاهدات.

2) معرفة طبيعة العلاقة بين الظاهرة قيد الدراسة والظواهر الاخرى ولعل رسم منحنى السلسلة يمكن ان يبرز جانب من هذه الفوائد لعملية تحليل السلسلة الزمنية.

3) معرفة ماضي الظاهرة وكيفية تغيرها.

4) التنبؤ بمستقبل الظاهرة قيد الدراسة مما تفيد لاتخاذ قرار معين وعند اجراء عملية التحليل للسلسلة اول عمل نقوم به رسم المنحنى البياني لقيم المشاهدات مع الزمن ونعين النقاط وبعد تعيين النقاط ورسم هذا المنحنى يبرز لنا تعرجات كبيرة في المنحنى وهذه التعرجات تجعلنا نطلق على السلسلة بانها خشنة ونستطيع قياس مدى الخشونة من خلال ايجاد معامل نسميه بمعامل الخشونة نجده من العلاقة التالية:

$$\text{معامل الخشونة} = \frac{\sum_{\text{ر}=2}^{\text{ن}} \left(\text{س}_{\text{ر}} - \text{س}_{\text{ر}-1}\right)^2}{\sum_{\text{ر}=2}^{\text{ن}} \left(\text{س}_{\text{ر}} - \bar{\text{س}}\right)^2} \qquad \text{.......................}(8-1)$$

وكلما كان هذا الرقم قليلاً كلما كانت السلسلة ملساء.

ولتوضيح هذا المفهوم نورد المثال التالي

مثال (8-1): احسب معامل الخشونة للسلسة التالية 7 ، 9، 14، 15، 20، 19

الحل: لحساب معامل الخشونة نكون جدول الحل (8-1).

ن	$س_ر$	$س_{ر-1}$	$س_ر - س_{ر-1}$	$(س_ر - س_{ر-1})^2$	$س_ر - \bar{س}$	$(س_ر - \bar{س})^2$
1	7	–	–	–	–	–
2	9	7	2	4	-5	25
3	14	9	5	25	0	0
4	15	14	1	1	1	1
5	20	15	5	25	6	36
6	19	20	-1	1	5	25
ع				56		87

جدول (7-1)

نجد المتوسط الحسابي $\bar{س} = \frac{7+9+14+15+20+19}{6} = \frac{84}{6} = 14$

ثم نجد معامل الخشونة من العلاقة الرياضية التالية.

$$معامل\ الخشونة = \frac{\sum_{ر=2}^{ن}(س_ر - س_{ر-1})^2}{\sum_{ر=2}^{ن}(س_ر - \bar{س})^2} = \frac{56}{87} = 0.64$$

8-2-2) : طريقة المعدلات المتحركة :

إن أهمية المعدلات المتحركة تبرز في أنها تعمل على الحد من خشونة السلسلة وجعلها ملساء ولايجاد المعدلات المتحركة لابد من اتباع الخطوات التالية

(أ) في حالة ما اذا كان المتوسط فردياً أي ان ل= 3، 5، 7، ......، ل= طول المعدل

نحدد القراءة الاولى عندما كان الزمن صفراً ونرمز لها بالرمز ص والقراءة الثانية $ص_1$ وهكذا تتكون السلسلة كما في جدول (8-2).

الزمن	0	1	2	3	......	ن−1
قيمة المشاهدة $ص_ر$	$ص_0$	$ص_1$	$ص_2$	$ص_3$		$ص_{ن-1}$

جدول (8−2)

* نرمز لقيم المعدلات المتحركة بالرمز $\acute{ص}_ر$

* نحدد موقع المعدل المتحرك الاول من العلاقة التالية:

$$\text{موقع المعدل الاول} = \frac{\text{طول المعدل} +1}{2} = \frac{ل + 1}{2} \quad ....(8-2)$$

مثال (8−2): اذا كان طول المعدل 3 لسلسة زمنية فان موقع المعدل الاول= $\frac{3+1}{2} = 2$ أي انه يقابل المشاهدة الثانية في السلسلة.

مثال (8−3) : اذا كان طول المعدل5 لسلسة زمنية فان موقع المعدل الاول= $\frac{5+1}{2} = 3$ أي انه يقابل المشاهدة الثالثة في السلسلة. وهكذا

* بعد تحديد موقع المعدل الاول نلجأ الى تعيين قيمة المعدل نفسه وعلى سبيل المثال اذا كان لدينا الطول 3 وقيم المشاهدات $ص_0$ ، $ص_1$، ....، $ص_{ن-1}$ فان موقع المعدل الاول $ص_1$= $\frac{3+1}{2} = 2$ أي مقابل المشاهدة الثانية.

وقيمة هذا المعدل = $\frac{ص_0+ص_1+ص_2}{3} =$

$$\frac{\text{المشاهدة السابقة للمعدل+ المشاهدة المقابلة للمعدل+ المشاهدة اللاحقة للمعدل}}{3}$$

ثم نجد

$$\hat{ص}_2 = \frac{ص_1 + ص_2 + ص_3}{3}$$

$$\hat{ص}_3 = \frac{ص_2 + ص_3 + ص_4}{3}$$

وعند كتابة جدول يشمل قيم المشاهدات والمعدلات المتحركة المقابلة لها كما في الجدول (8-3).

الزمن ن	0	1	2	3	4	.....	ن-2	ن-1
المشاهدات $ص_ر$	$ص_0$	$ص_1$	$ص_2$	$ص_3$	$ص_4$	....	$ص_{ن-2}$	$ص_{ن-1}$
المتوسطات المتحركة $\hat{ص}$	–	$\hat{ص}_1$	$\hat{ص}_2$	$\hat{ص}_3$	$\hat{ص}_4$	..	$\hat{ص}_{ن-1}$	–

جدول (8-3)

ملاحظات:

1) نلاحظ ان $ص_0$ لم يقابلها معدل متحرك لانه لم يسبقها اية مشاهدة.

2) $ص_{ن-1}$ لم يقابلها معدل متحرك وهكذا بالنسبة لباقي الاطوال الفردية

مثال (8-3): اوجد المعدلات المتحركة بطول 3 للسلسلة الزمنية

7، 11، 8، 19، 25، 14، 20.

الحل: نرتب قيم المشاهدات في جدول زمني كما هو مبين ادناه في جدول (8-4).

	$ص_0$	$ص_1$	$ص_2$	$ص_3$	$ص_4$	$ص_5$	$ص_6$
الزمن ن	0	1	2	3	4	5	6
المشاهدات $ص_ر$	7	11	8	19	25	14	20
المعدلات $\hat{ص}_ر$	-	8.67	12.67	17.33	19.33	19.67	–

جدول (8-4)

نحدد موقع المعدل المتحرك الاول= $\frac{1+3}{2} = 2$ مقابل $ص_1$ =11

نجد: $\hat{ص}_1 = \frac{ص_0 + ص_1 + ص_2}{3} = \frac{7+11+8}{3} = \frac{26}{3} = 8.67$

$$\bar{ص}_2=\frac{ص_1+ص_2+ص_3}{3}=\frac{1+8+11}{3}=12.67$$

$$\bar{ص}_3=\frac{ص_2+ص_3+ص_4}{3}=\frac{25+1+8}{3}=17.33$$

$$\bar{ص}_4=\frac{ص_3+ص_4+ص_5}{3}+\frac{14+25+19}{3}=19.33$$

$$\bar{ص}_5=\frac{ص_4+ص_5+ص_6}{3}=\frac{20+14+25}{3}=19.67$$

مثال(8-4): اوجد المعدلات المتحركة بطول 5 للسلسلة الزمنية

7، 13، 21، 23، 27، 19، 17.

الحل: نرتب البيانات التالية في الجدول (8-5).

الزمن $ن$	0	1	2	3	4	5	6
المشاهدات $ص_ر$	7	13	21	23	27	19	17
المعدلات $\bar{ص}_ر$	–	–	18.2	20.6	21.4	–	–

جدول (8-5)

نجد ترتيب المشاهدة المقابلة للمعدل الاول= $\frac{1+5}{2}=3$.

فيكون ترتيب المشاهدة الثالثة هي المقابلة لاول معدل متحرك.

– نجد قيمة المعدل المتحرك من العلاقة

$$\hat{ص}_2=\frac{ص_0+ص_1+ص_2+ص_3+ص_4}{5}$$

$$\hat{ص}_2=\frac{27+23+21+13+7}{5}=\frac{91}{5}=18.2$$

$$\hat{ص}_3 = \frac{ص_1+ص_2+ص_3+ص_4+ص_5}{5} = \frac{19+27+23+21+13}{5} = \frac{103}{5} = 20.6$$

$$\hat{ص}_4 = \frac{ص_2+ص_3+ص_4+ص_5+ص_6}{5} = \frac{17+19+27+23+21}{5} = \frac{107}{5} = 21.4$$

ب) اذا كان طول المتحرك زوجيا لذا نتبع الخطوات التالية

- نكون جدول نحدد فيه الزمن وقيم المشاهدات الاصلية
- لتحديد موقع المعدل، الاول نكتب العلاقة التالية

موقع المعدل المتحرك الاول= $\frac{ل+1}{2}$

فعندما يكون ل=4 فان موقع المعدل الاول يكـون = $\frac{4+1}{2} = 2.5$ أي ان المعـدل يقـع بين المشاهدة الثانية والمشاهدة الثالثة والرابعة وهكذا.

وحتى يكون المعدل المتحرك مقابل أي مشاهدة اصلية نلجأ للخطوة التالية.

- نجد معدل متحرك مركزي بطول 2 فيكون هـذا المعـدل مقـابل للمشـاهدة الثالثـة. والرابعة وهكذا.

مثال (8–6): اوجد معدل متحرك بطول 4 لقيم المشاهدات التالية

4، 9، 15، 8، 21، 24، 11، 12.

الحل: نجد ترتيب موقع المعدل المتحرك الاول= $\frac{4+1}{2} = 2.5$

-نرتب البيانات ضمن الجدول (8–6).

الزمن	0	1	2	3	4	5	6	7
قيم المشاهدة	4	9	15	8	21	24	11	12
$\hat{ص}_7$				9	13.25	17	16	17
$\hat{ص}_8$				11.125	15.125	16.5	16.5	

جدول (8–6)

$$\hat{\text{ص}}_{2.5} = \frac{8+15+9+4}{4} = 9 \qquad \hat{\text{ص}}_{3.5} = \frac{21+8+15+9}{4} = \frac{53}{4} = 13.25$$

$$\hat{\text{ص}}_{4.5} = \frac{24+21+8+15}{4} = \frac{68}{4} = 17 \qquad \hat{\text{ص}}_{5.5} = \frac{11+24+21+8}{4} = \frac{64}{4} = 16$$

$$\hat{\text{ص}}_{6.5} = \frac{12+11+24+21}{4} = \frac{68}{4} = 17$$

ثم نجد المعدلات المركزي التالية والتي سنرمز لها بالرمز $\hat{\hat{\text{ص}}}$

$$\hat{\hat{\text{ص}}}_{3} = \frac{\hat{\text{ص}}_{2.5}+\hat{\text{ص}}_{3.5}}{2} = \frac{13.25+9}{2} = 11.125$$

$$\hat{\hat{\text{ص}}}_{4} = \frac{\hat{\text{ص}}_{3.5}+\hat{\text{ص}}_{4.5}}{2} = \frac{17+13.25}{2} = 15.125$$

$$\hat{\hat{\text{ص}}}_{5} = \frac{\hat{\text{ص}}_{4.5}+\hat{\text{ص}}_{5.5}}{2} = \frac{16+17}{2} = 16.5$$

$$\hat{\hat{\text{ص}}}_{6} = \frac{\hat{\text{ص}}_{5.5}+\hat{\text{ص}}_{6.5}}{2} = \frac{17+16}{2} = 16.5$$

3-8) مركبات السلسلة الزمنية.

عندما نحصل على قيم المشاهدات للسلسلة الزمنية لا بد من دراسة المؤثرات التي قد تؤثر على هذه القراءات وماهذه المؤثرات الا ما نسميها بمركبات السلسلة الزمنية والتي ناتج حاصل ضربها معا يعطي قيم المشاهدة الاصلية ونعبر عن ذلك بالمعادلة التالية.

$$\text{ص} = \text{ت} \times \text{ف} \times \text{د} \times \text{خ} \qquad \text{.....................(3-8)}$$

حيث ص: هي قيمة المشاهدة الاصلية.

ت: مركبة الاتجاه العام.

ف: المركبة الفصلية (الموسمية)

د: مركبة الدورة.

خ: مركبة الخطأ

وسنتناول كل مركبة من المركبات آنفة الذكر على حدى.

8-4) مركبة الاتجاه العام.

تعريف: مركبة الاتجاه العام هي المركبة التي توضح مسيرة السلسلة بشكل عام وعلى مدى بعيد ويمكن استخراجها من خلال معادلة انحدار ص/س والمتمثل بالعلاقة.

ص= أس+ب ....(8-4)

ومن الملاحظ من العلاقة اعلاه ان قيمة ص مرتبطة بكل من أ، س بشكل رئيسي ولذا يحتمل تزايد ص او تناقصها او قد تحافظ على قيمتها ثابتة. كذلك هناك طرق اخرى لايجاد هذه المركبة منها طريقة الانتشار (التمهيد باليد)، طريقة المعدلات المتحركة، طريقة المربعات الصغرى وكذلك طريقة نصف السلسلة المتحركة.

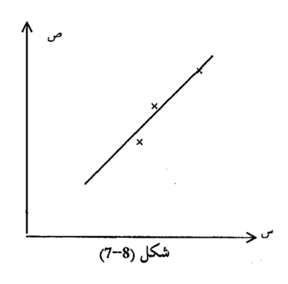
1) طريقة الانتشار (التمهيد باليد):

مثال (8-7) : البيانات التالية تمثل قيم مشاهدات في سلسلة زمنية لقراءات تمثل انتاج مصنع للأحذية خلال اسبوع معين كما في جدول (8-7).

اليوم	السبت	الاحد	الاثنين	الثلاثاء	الاربعاء	الخميس
مقدار الانتاج	120	140	130	145	115	125

جدول (8-7)

حيث مقدار الانتاج بالزوج. والمطلوب ايجاد مركبة الاتجاه العام عن طريق رسم انتشاري وايجاد معادلة الخط العام



شكل (8-7)

ولايجاد معادلة خط الاتجاه نأخذ نقطتين تقعان على الخط الممهد. ونرمز لهما بالرمز أ، ب ونكتب احداثي كل منهما مع ملاحظة اعطاء تسلسل عددي 1، 2، 3، ...،6 للأيام حتى يسهل ايجاد معادلة خط الاتجاه العام والتي يمكن ايجادها من العلاقة الرياضية

$$\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

$$\frac{ص - 130}{س - 3} = \frac{145 - 130}{4 - 3}$$

$$ص - 30 = 15 \, (س - 3)$$

$$ص - 130 \times 1 = 15س - 45.$$

أو $ص = 15س + 85$

وهذه الطريقة تختلف من شخص الى آخر مما يسبب لها عدم الدقة.

2) طريقة المعدلات المتحركة.

قد يحتاج الى تمهيد لخط السلسلة لكثرة التعرجات التي قد تظهر في السلسلة ولكي نجعل الخط املس نلجأ الى تمهيد هذا الخط عن طريق المعدلات المتحركة. وقد سبق وان تناولنا المعدلات المتحركة بشكل مفصل.

3) طريقة المربعات الصغرى.

وهذه الطريقة اكثر دقة من الطريقتين السابقتين وهي ان نجد معادلة خط الانحدار العام ل ص/س

ص= أس+ب.

ثم نجد أ من العلاقة

$$أ = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س ص - \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س \sum_{ر=1}^{ن} ص}{ن}}{\sum_{ر=1}^{ن} س^2 - \frac{\left(\sum_{ر=1}^{ن} س\right)^2}{ن}} \quad ......(5-8)$$

ونجد ب من العلاقة:

$$ب = \overline{ص} - أ\overline{س} \quad ....(6-8)$$

مثال(8-8): البيانات التالية تمثل قراءات لدرجة حرارة مريض خلال ست ساعات مأخوذة القراءات كل ساعة كما في الجدول (8-8).

زمن القراءات	1	2	3	4	5	6
درجة الحرارة	37	38	38.5	37.5	37	37

جدول (8-8)

والمطلوب: ايجاد معادلة خط الاتجاه العام .

الحل: نشكل جدول يحوي جميع البيانات المطلوبة للحل كما في جدول (8-9).

س	ص	س.ص	$س^2$	$ص^2$
1	37	37	1	1369.00
2	38	76	4	1444.00
3	38.5	115.5	9	1482.25
4	37.5	150	16	1406.25

	5	37	185	25	1369
	6	37	222	36	1369
ع	21	225	785.5	91	8439.5

جدول (8-9)

ولايجاد أ نطبق العلاقة اعلاه:

$$أ = \frac{\frac{225\times 21}{6} - 785.5}{\frac{21\times 21}{6} - 91} = \frac{787.5 - 785.5}{73.5 - 91} = -\frac{2}{17.5} = -0.114$$

ثم نجد ب= $\bar{ص}$ -أ $\bar{س}$ = 37.5−0.114×3.5 = 37.5−0.399 = 37.101

∴ معادلة الاتجاه العام هي : ص = 0.114س+37.101

د- طريقة معدل نصف السلسلة.

وهذه الطريقة اقل دقة من طريقة المربعات الصغرى الا انها اكثر دقة من المتوسطات المتحركة وطريقة الانتشار. وتتلخص بالخطوات التالية.

- نجد المتوسط الحسابي لنصف السلسلة الثاني اذا كان عدد المشاهدات زوجي اما اذا كان عدد المشاهدات فردي فتهمل المشاهدة الوسطى ثم نجد المتوسط الحسابي للنصف الثاني وبهذا يتعين الاحداثي الصادي للنقطتين.

- لتحديد الاحداثي السيني نعطي قيم المشاهدات ترقيم متسلسل سواءً كانت المشاهدات قيما او غير ذلك ثم نجد المتوسط الحسابي للنصف الاول من القيم سواءً كان عددها زوجي ام فردي فيكون المتوسط هو الاحداثي السيني وكذلك للنصف الثاني المتوسط الحسابي يكون هو الاحداثي السيني وبذا تتعين النقطتين.

- نصل بين النقطتين بعد تعينهما على المستوى الاحداثي فيكون لدينا خط الاتجاه العام.

- نجد معادلة خط الاتجاه العام من العلاقة.

$$\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

مثال (8-9): اذا كـان انتـاج مصنـع للألبسـة الصوفيـة خـلال عشـرة سـنوات مبينـة بالجدول التالي حيث الانتاج بالآف القطع. وهي كما في الجدول (8-10).

السنة س	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
عدد القطع ص المنتجة	53	64	67	60	69	74	67	79	85	90

جدول (8-10)

والمطلوب ايجاد معادلة خط الاتجاه العام بطريقة متوسط نصف السلسلة.

الحل: نتبع الخطوات التالية

نكون جدول يشمل جميع متطلبات الحل وهو كما في الجدول(8-11).

السنة س	السنة بالترقيم س	عدد القطع المنتجة ص	معدل نصف س	معدل نصف ص
1970	1	53		
1971	2	64		
1972	3	67	الأول = 3	الأول = 62.6
173	4	60		
1974	5	69		
1975	6	74		
1976	7	67	الثانى = 8	الثانى = 79
1977	8	79		
1978	9	85		
1979	10	90		

جدول (7-11)

نصف المعدل الاول لـ ص $= \frac{69+60+67+64+53}{5} = 62.6 =$ ص$_1$

نصف المعدل الاول لـ ص = $\frac{90+85+79+67+74}{5} = 79 =$ ص$_2$

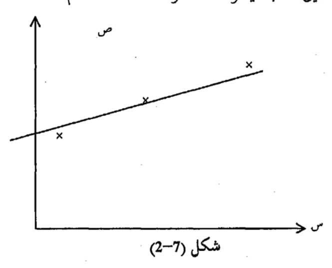
نصف المعدل الاول لـ س= $\frac{5+4+3+2+1}{5} = \frac{15}{5} = 3 =$ س$_1$

نصف المعدل الثاني لـ س= $\frac{10+9+8+7+6}{5} = \frac{40}{5} = 8 =$ س$_2$

∴ النقطتين هما أ(3، 62.6) ، ب(8، 79)

- نعين النقطتين على المستوى الاحداثي.

- نصل بين النقطتين أ، ب فيكون هذا هو خط الاتجاه العام.



شكل (7-2)

نجد معادلة خط الاتجاه العام

$$\frac{\text{ص} - 62.6}{\text{س} - 3} = \frac{79 - 62.6}{8 - 3} = \frac{16.4}{5}$$

5ص -313=16.4س-49.2

5ص = 16.4س + 313 -49.2 = 16.4س+263.8

$$\text{ص} = \frac{16.4}{5}\text{س} + \frac{263.8}{5}$$

ص= 3.28س+52.76

وهذه هي معادلة الاتجاه العام.

8-5) تقدير المركبة الفصلية.

لعل هذه الظاهرة تعني في الدرجة الاولى ايجاد قيمة الظاهرة على اعتبار انهــا لا تتـأثر الا بالموسم ولحساب الاثار الموسمية هناك طريقتان.

أ– طريقة النسب للمعدل المتحرك.

ب– من العلاقة ص= ت×ف×د×خ

فعندما تكون المركبة الاتجاهية والمركبة الدورية والخطأ معلومتين نستطيع ايجاد المركبــة الموسمية. وهكذا الا اننا سنتناول الطريقة الاولى بشيء من التفصيــل ولسـهولة التعـامل معها من خلال المثال التالي.

مثال(8–10): اذا كان انتاج مصنع معين خلال خمس سنوات حيث ان كمية الانتاج مـأخوذة كـل ثلاثـة شـهور وثبـت البيانـات بـالجدول التـالي والانتـاج بـآلاف الوحدات كما في الجدول (8–12).

ربع السنة	1976	1977	1978	1979	1980
الربع الاول	7	12	8	20	25
الربع الثاني	9	11	13	21	27
الربع الثالث	10	14	15	23	28
الربع الرابع	5	20	16	19	27

جدول (7–12)

والمطلوب ايجاد النسب الموسمية لهذا الانتاج باستخدام فكرة النسبة للمعدل المتحرك.

الحل: لحل مثل هذه المسائل نتبع الخطوات التالية.

- نجد مجموع مكونات الصفوف لمختلف سنوات الانتاج أي بجمع الانتاج في الربع الاول لكل سنة لمختلف السنوات الانتاجية.

- نجد المعدل الموسمي من العلاقة

$$\text{المعدل الموسمي} = \frac{\text{المجموع الموسمي لكل ربع}}{\text{عدد السنوات}} \quad \text{............(7-8)}$$

- نجد المعدل الموسمي العام

$$\text{المعدل الموسمي العام} = \frac{\text{مجموع المتوسطات الموسمية}}{\text{عدد الارباع}} \quad \text{............(8-8)}$$

- نجد النسبة الموسمية لكل حالة من العلاقة

$$\text{النسبة الموسمية} = \frac{\text{المعدل الموسمي}}{\text{المعدل الكلي}} \times 100\% \quad \text{............(9-8)}$$

والان نشكل جدول نلخص فيه كل ما نحصل عليه من حسابات في الخطوات السابقة كما في الجدول (8-13).

ربع السنة	المجموع الموسمي	المعدل الموسمي	النسبة الموسمية
الربع الاول	72	14.4	87.27
الربع الثاني	81	16.2	98.18
الربع الثالث	90	18-	109.09
الربع الرابع	87	17.4	105.45
المعدل العام	82.5	16.5	٪400.00

جدول (8-13)

ويمكننا قراءة النسب المئوية المختلفة من العمود الاخير ونلاحظ ان مجموعها هو 400

وذلك بضرب 100 في عدد الفصول.

ولتخليص قيم الظاهرة من تأثير التغيرات الموسمية فاننا نتبع الخطوات التالية.

- نقسم القيم الاصلية على النسب الموسمية.

- بضرب ناتج القسمة في مئة (100).

ونحصل على القيم التالية لكل قيمة فمثلاً القيمة من الربع الاول لعام 1976 بعد تخليصها من التأثير الموسمي تصبح= $\frac{7}{87.27} \times 100 = 8.02$

القيمة من الربع الثاني لعام 176 بعد تخليصها من التأثير الموسمي تصبح

$$\frac{9}{98.18} \times 100 = \frac{900}{98.18} = 9.17$$

وهكذا لباقي القيم في الجدول المذكور.

جـ - التغيرات الدورية والعرضية.

يمكن الحصول على تأثير كل من التغيرات الدورية والعرضية وذلك من العلاقة

ص = ت×ف×د×خ

وذلك بتخليص الظاهرة من تأثير كل من التغيرات الاتجاهية والتغيرات الموسمية معاً ويمكن الحصول عليهما معاً من العلاقة.

$$د \cdot خ = \frac{ص}{ت \times ف} \quad \text{.................(8-10)}$$

ونظراً لتداخلهما معا فيوجدا بشكل قيمة واحدة.

تمارين عامة على السلاسل الزمنية

س1: اذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية: 9، 13، 18، 19، 12، 21، 10
تمثل سلسلة زمنية والمطلوب ايجاد.
(أ) المعدلات المتحركة بطول 3.
(ب) المعدلات المتحركة بطول 5.
(جـ) المعدلات المتحركة بطول 7
(د) المعدلات المتحركة بطول 4.
(هـ) المعدلات المتحركة بطول 6
(و) اوجد معامل الخشونة لهذه السلسلة

س2– الجدول التالى يمثل عدد الطلاب في مدرسة ما خلال الاعوام1978–1987

السنة	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
عدد الطلاب	540	630	650	690	720	740	790	840	900	950

والمطلوب:
أ– رسم الشكل الانتشاري لهذه البيانات.
ب– اوجد معادلة الاتجاه العام بواسطة التمهيد باليد ثم اوجد القيم الاتجاهية للقيم الاصلية
جـ– اوجد معادلة الاتجاه العام بواسطة طريقة معدل نصف السلسلة. ثم اوجد القيم الاتجاهية للقيم الاصلية.
د– احسب القيم الاتجاهية عن طريق اسلوب المعدلات المتحركة وبطول 3 .

س3– الجدول التالي يمثل انتاج مصنع ما من الوحدات المنتجة مقدرة بالاف الوحدات خلال عشرة سنوات.

السنوات	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
عدد الوحدات المنتجة	7	13	19	21	27	28	32	35	39	40

والمطلوب .
أ– رسم شكل الانتشار لهذه البيانات.
ب– ايجاد معادلة الاتجاه العام بواسطة التمهيد باليد ثم ايجاد القيم الاتجاهية للقيم الاصلية.
جـ– اوجد معادلة الاتجاه العام بواسطة طريقة المربعات الصغرى ثم ايجاد القيم الاتجاهية للقيم الاصلية.
د– اوجد معادلة الاتجاه العام باستخدام طريقة معدل نصف السلسلة ثم اوجد القيم الاتجاهية لكل قيمة اصلية.

الفصـــل التاسع

الارقام القياسية

9-1) مفهوم الأرقام القياسية واستخداماتها وأنواعها :

لعل هذا الموضوع من اهم المواضيع التي تلعب دوراً هاماً في حياتنا اليومية حيث تربطنا بما سبق وبما سيكون لاحقاً وخاصة عند دراسة اسعار سابقة وربطها بالاسعار الحالية والمستقبلية لعدد من الاصناف وكذلك ايضا ربط كميات منتجة سابقا مع الانتاج الحالي والمستقبلي وهكذا دراسات اخرى. ولا نستطيع عمل دراسات من هذا النوع الا من خلال التعرف على ادوات ومقاييس لهذا الغرض تسمى بالارقام القياسية وعليه فاننا سنعطي التعريف التالي حتى نستطيع توضح هذا المفهوم.

9-1-1 : مفهوم الرقم القياسي :

لتوضيح هذا المفهوم لا بد من إعطاء التعاريف التالية :

– **تعريف:** الرقم القياسي هو اداة احصائية مصممة لتبين التغير في قيمة الظاهرة او مجموعة مرتبطة من الظواهر قيد الدراسة والتي لها علاقة بالنسبة لقيمتها في الزمن والمكان الجغرافي او أية خاصية اخرى.

وعندما نريد قياس التغير في قيمة الظاهرة فاننا ننسب قيمة الظاهرة في وقت معين الى قيمتها في وقت آخر او قيمتها في مكان جغرافي معين الى قيمتها في مكان جغرافي آخر. وقد تكون هناك زيادة او انخفاض في قيمة الظاهرة موضوع البحث.

فترة الاساس: هي الفترة الزمنية التي نقيس منها التغير في الظاهرة.

فترة المقارنة: هي الفترة الزمنية التي حصل خلالها تغير في الظاهرة اما اذا اردنا مقارنة التغير بين مكانين مختلفين فان المكان الذي نقيس منه التغير فيسمى مكان الاساس

والمكان الذي حصل خلاله التغير يسمى مكان المقارنة .

9-1-2) استخدامات الارقام القياسية.

يمكن استخدام الارقام القياسية في كثير من مجالات الحياة وخاصة الاقتصادية منها وذلك لأجل.

1) مقارنة اسعار سلع مختلفة.

2) مقارنة تكاليف المعيشة في مكان مع مكان آخر.

4) يمكن التنبؤ بأحوال الاعمال والاقتصاد.

5) مقارنة عدد العمال في سنة معينة مع عددهم في سنة سابقة.

6) مقارنة المستوى التعليمي في بلد ما وفي سنة ما مع مستواه في نفس البلد في سنة اخرى.

7) مقارنة عدد السكان في بلد وفي سنة ما مع عدد السكان في سنة اخرى.

وهناك الكثير الكثير من الاستعمالات للارقام القياسية .

ومن المفيد أن نعطي الخصائص لسنة الأساس.

خصائص سنة الاساس:

1) تحديد سنة الاساس بحيث لا تكون بعيدة عن سنة المقارنة.

2) ان تكون سنة الاساس ذات بنية من حيث موضع الرقم القياسي متشابهة مع ما هو عليه في سنة المقارنة.

3) ان تكون سنة الاساس ذات هدوء نسبي من انعكاساتها وداعياتها واثرها على الظاهرة قيد الدراسة.

9-3-1 انواع الارقام القياسية:

هناك عدة انواع من الارقام القياسية نذكر منها.

(1) الأرقام القياسية البسيطة.

(2) الأرقام القياسية المرجحة.

9-2) الرقم القياسي البسيط.

تعريف: الرقم القياسي البسيط وهو الرقم المتمثل من نسبه متغير واحد في فترة المقارنة على نفس المتغير في فترة اخرى هي فترة الاساس ومن هذه الارقام.

ويقسم إلى قسمين :

1) الرقم القياسي البسيط.

2) الرقم القياسي التجميعي البسيط.

أما الأرقام القياسية البسيطة ومنها.

أ) الرقم القياسي البسيط للسعر(منسوب السعر).

وهو النسبة المئوية لسعر سلعة معينة في سنة المقارنة والذي سنرمز له بـالرمز $س_م$ الى سعرها في سنة الاساس والذي سنرمز له بالرمز $س_0$ وبصيغة رموز يمكن كتابته على النحو.

$$أ_س = \frac{س_م}{س_0} \times 100\%$$ حيث $أ_س$: الرقم القياسي البسيط للاسعار .....(9-1)

مثال (9-1): اذا كان معدل سعر كيلو البندورة في عام 1990 هو 25 قرشاً وفي عام 1995 كان 27 قرشاً اوجد الرقم القياسي البسيط لسعر البندورة على اعتبار أن عام 1990 هو سنة الأساس.

الحل: $أ_س = \frac{27}{25} \times 100\% = \frac{2700}{25} = 108\%$ أي بزيادة قدرها 8٪ .

ب) الرقم القياسي البسيط للكميات (منسوب الكمية).

هو النسبة المئوية لكميات او حجوم سلعة معينة في فترة معينة (سنة مقارنة) والتي سنرمز لها بالرمز $ك_م$ الى كمياتها او حجومها في فترة أخرى (سنة أساس) والتي سنرمز لها بالرمز $ك_0$ وبصيغة رموز يمكن كتابتها على الصورة

$$\text{أ}_{\text{ك}} = \frac{\text{ك}_{\text{م}}}{\text{ك}_{0}} \times 100\,\% \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2\text{-}9)$$

جـ) الرقم القياسي البسيط للقيمة (منسوب القيمة)

هو النسبة المئوية المئوية لقيمة سلعة معينة في فترة المقارنة والتي سنرمز لها بالرمز $\text{ق}_{\text{م}}=\text{ك}_{\text{م}}\times\text{س}_{\text{م}}$ الى قيمتها في سنة الاساس والتي سنرمز بالرمز $\text{ق}_{0}=\text{ك}_{0}\times\text{س}_{0}$ ويمكن صياغتها على النحو

$$\text{أ}_{\text{ق}} = \frac{\text{ق}_{\text{م}}}{\text{ق}_{0}} \times 100\% = \frac{\text{ك}_{\text{م}}\times\text{س}_{\text{م}}}{\text{ك}_{0}\,\text{س}_{0}} \times 100\% \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3\text{-}9)$$

2) الارقام القياسية التجميعية البسيطة:

وهي تقسم الى ثلاثة اصناف نذكر منها ما يلي:

أ) الرقم القياسي التجميعي البسيط للاسعار $= \dfrac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{م ر}}}{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{0\,\text{ر}}} \times 100\%$ ……(4-9)

ب) الرقم القياسي التجميعي البسيط للكميات $= \dfrac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ك}_{\text{م ر}}}{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ك}_{0\,\text{ر}}} \times 100\%$ ……(5-9)

جـ) الرقم القياسي التجميعي البسيط للقيمة $= \dfrac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ك}_{\text{م ر}}\,\text{س}_{\text{م ر}}}{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ك}_{0\,\text{ر}}\,\text{س}_{0\,\text{ر}}} \times 100\%$ …(6-9)

$$= \frac{\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ق}_{\text{م ر}}}{\sum \text{ق}_{0\,\text{ر}}} \times 100\%$$

9-3: الارقام القياسية المرجحة: ومنها:

9-3-1 الارقام القياسية للاسعار والمرجحة بالكميات.

ومن أمثلة هذا النوع من الأرقام ما يلي :

أ) الرقم القياسي البسيط للاسعار والمرجح بكميات سنة الاساس (رقم لاسبير للاسعار).

$$\text{الرقم القياسي للاسبير} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{م ر}\, ك_{0 ر}}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{0 ر}\, ك_{0 ر}} \times 100\% \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7-9)$$

ب) الرقم القياسي للاسعار والمرجح بكميات سنة المقارنة.

$$\text{رقم باش للاسعار} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{م ر}\, ك_{م ر}}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{0 ر}\, ك_{م ر}} \times 100\% \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8-9)$$

الرقم القياسي للاسعار والمرجح بالمتوسط الحسابي لكميات سنة الاساس والمقارنة

$$\text{ج)(رقم مارشال-ابدجورث)} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{م ر} \times \left(\frac{ك_{م ر} + ك_{0 ر}}{2}\right)}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{0 ر} \times \left(\frac{ك_{م ر} + ك_{0 ر}}{2}\right)} \times 100\% \quad \ldots (9-9)$$

$$= \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{م ر}\left(ك_{م ر} + ك_{0 ر}\right)}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{0 ر}\left(ك_{م ر} + ك_{0 ر}\right)} \times 100\%$$

(5) الرقم القياسي التجميعي للاسعار والمرجح بالوسط الهندسي لكميات سنة الاساس وسنة المقارنة.

$$= \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{م ر} \sqrt{ك_{0 ر} \times ك_{م ر}}}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{0 ر} \sqrt{ك_{0 ر} \times ك_{م ر}}} \times 100\% \quad ......(10-9)$$

6) رقم فيشر للاسعار= $\sqrt{\text{رقم لاسبير} \times \text{رقم باش}}$ وهو الرقم الأمثل

$$\text{رقم فيشر للأسعار} = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{م ر} \times ك_{0 ر}}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{0 ر} \times ك_{0 ر}} \times \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{م ر} \times ك_{م ر}}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{0 ر} \times ك_{م ر}}} \times 100\% \quad ...(11-9)$$

(ب) الارقام القياسية للكميات والمرجحة بالاسعار:

وهي نفس الارقام السابقة ولكن بدلا من الترجيح بالكميات كما كان سابقا بل الكميات ترجح بالاسعار.

مثال (9-1): البيانات في جدول رقم (9-1) تبين اسعار($س_ر$) بالدينار/طن وكميات ($ك_ر$) بالالاف الاطنان لثلاثة اصناف من الخضروات المباعة في السوق المركزي في عامي 1990، 1994.

الصنف	1990		1994	
الصنف	$س_{0ر}$	$ك_{0ر}$	$س_{م ر}$	$ك_{م ر}$
بندورة	250	160	350	80
باذنجان	150	15	200	25
فلفل أخضر	350	5	400	10

جدول (9-1)

المطلوب ايجاد

(1) الرقم القياسي البسيط لسعر صنف البندورة.

(2) الرقم القياسي البسيط التجميعي للاسعار.

(3) الرقم القياسي البسيط التجميعي للكميات.

(4) رقم لاسبير للاسعار.

(5) رقم باش للاسعار.

(6) رقم مارشال – ايدجورث للأسعار (المرجح بالوسط الحسابي)

(7) الرقم القياسي للاسعار والمرجح بالوسط الهندسي.

(8) الرقم القياسي الامثل (رقم فيشر)

الحل: نكون جدول الحل (9–2).

	1990		1994								
الصنف	س0ر	ك0ر	س م ر	ك م ر	س0ر ك0ر	س م ر ك0ر	س0ر ك م ر	س0ر كم ر	(ك0ر+كم ر)/2	سم ر (ك0ر+كم ر)/2	س0ر (ك0ر+كم ر)/2
البندورة	250	60	350	80	15000	21000	28000	20000	70	24500	17500
الباذنجان	150	15	200	25	2250	3000	5000	3750	20	4000	3000
الفلفل الاخضر	350	5	400	10	1750	2000	4000	35000	7.5	3000	2625
المجموع	750	80	950	115	19000	26000	37000	272500		31500	23125

جدول (9–2)

(1) الرقم القياسي البسيط للبندورة = $\frac{350}{250} \times 100 = 140\%$ أي بزيادة مقدارها 40٪.

(2) الرقم القياسي التجميعي البسيط للاسعار= $\frac{950}{750} \times 100\% = 126.67\%$

(3)الرقم القياسي التجميعي البسيط للكميات= $\frac{115}{80} \times 100\% = 143.75\%$

(4) رقم لاسبير= $\frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{مر} . ك_{0ر}}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{0ر} . ك_{0ر}} \times 100\% = \frac{26000}{19000} \times 100\% = 136.84\%$

(5) باش للاسعار= $\frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{مر} . ك_{مر}}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{0ر} . ك_{مر}} \times 100\% = \frac{37000}{27250} \times 100\% = 135.77\%$

(6)رقم مارشال ابدجورت= $\frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{مر}(ك_{0ر}+ك_{مر})}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{0ر}\frac{(ك_{0ر}+ك_{مر})}{2}} \times 100\% = \frac{3150}{23125} \times 100\% = 136.22\%$

(7) ثم نكون جدول (9-3) تابع

$\sqrt{ك_{0ر} \times ك_{مر}}$	$س_{0ر} \sqrt{ك_{0ر} \times ك_{مر}}$	$س_{مر} \sqrt{ك_{0ر} \times ك_{مر}}$
69.28	17320.00	24248.0
19.36	2904.00	3872.0
7.07	2474.5	2828.0
المجموع	22698.5	30948

جدول (9-3)

(7) الرقم القياسي للاسعار والمرجح بالوسط الهندسي

$$\frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{مر} \sqrt{ك_{0ر} ك_{مر}}}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{0ر} \sqrt{ك_{0ر} ك_{مر}}} = 100 \times \frac{30948}{22698.5} \times 100\%$$

٪136.34=

(8) الرقم القياسي الامثل (فيشر) = $\sqrt{\text{لاسبير} \times \text{باش}}$

$= \sqrt{135.77 \times 136.84} = 136.30\%$

مثال(9–2): البيانات في جدول (9–4) تمثل الكميات المباعة واسعار مجموعة من الاصناف في سنتي 1975، 1979.

الصنف / السنة	سنة 75		سنة 79	
	ك0ر	س0ر	كم ر	سم ر
أ	59.2	24	105.4	50
ب	22	22	31.7	48
جـ	2.8	27	10.3	49
د	8.7	28	6.6	54

جدول (9–4)

المطلوب : ايجاد

(1) الرقم القياسي للاسبير.

(2) الرقم القياسي لباش.

(3) الرقم القياسي لمارشال والمرجح بالوسط الحسابي.

(4) الرقم القياسي لمارشال والمرجح بالوسط الهندسي.

(5) الرقم القياسي لفيشر.

الحل: تكوين جدول الحل (9–5).

السنة / الصنف	سنة 75		سنة 79		س م ر . ك م ر	س م ر ك م ر	س م ر ك م ر
	ك0ر	س م ر	ك م ر	س م ر			
ب	22	22	31.7	48	1056	484	1521.6
جـ	2.8	27	10.3	49	137.2	75.6	504.7
د	8.7	28	6.6	54	469.8	243.6	356.4
المجموع	–	–	–	–	4323	2080	7652.7

جدول (9–5)

نكون جدول (9–6) تابع

س ر . ك م ر	ك0ر+ك م ر	س م ر (ك م ر+ك0ر)	س0ر (ك0ر+ك ر م)	√(ك م ر+ك0ر)	س م ر √(ك م ر ك0ر)	س0 ر √(ك م ر ك0ر)
2529.6	158.6	7930	3806.4	74.8818	3744.0887	1797.1626
697.4	53.7	2577.6	1181.4	26.40083	1267.5999	580.9833
278.1	13.1	641.9	353.7	5.3703	263.1441	144.9978
184.8	15.3	826.2	428.2	7.5776	409.903	212.1728
3689.9	240.7	11975.7	5769.9	114.238	5684.0231	2735.3164

جدول (9–6)

(1) الرقم القياسي للاسبير $= \dfrac{\sum_{ر=1}^{ن} \text{س م ر ك0ر}}{\sum_{ر=1}^{ن} \text{س 0ر . ك0ر}} \times 100\%$

$= \dfrac{4323}{2080} \times 100\% \quad = 207.8365\%$

أي بزيادة مقدارها 107٪

(2) الرقم القياسي لباش $= \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{م ر} ك_{م ر}}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{0ر} . ك_{م ر}} \times 100\%$

$= \frac{7652.7}{3689.9} \times 100\% = 207.3959\%$

أي بزيادة 107.3959٪

(3) الرقم القياسي لمارشال - ايدجورث $= \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{م ر} \left(ك_{0ر} + ك_{م ر}\right)}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{0ر} \left(ك_{0ر} + ك_{م ر}\right)} \times 100\%$

$= \frac{11975.7}{5769.9} \times 100\% = 207.5547\%$

أي بزيادة 107.55٪

(4) رقم قياسي مارشال -ايدجورث المرجح بالوسط الهندسي $= \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{0ر} \sqrt{ك_{0ر} . ك_{م ر}}}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{0ر} \sqrt{ك_{0ر} . ك_{م ر}}} \times 100\%$

$= \frac{5684.0231}{2735.3164} \times 100\% = 207.8023\%$

أي بزيادة 107.8013

(8) الرقم القياسي الامثل (فيشر) $= \sqrt{\text{لاسبير} \times \text{باش}}$

$= \sqrt{207.9359 \times 207.8365}$

$= \sqrt{43104.438} = 207.6161\%$

أي بزيادة 107.6161٪

مثال(9-3): البيانات التالية في جدول (9-7) تمثل الاسعار والكميات المباعة لعدة اصناف سنة 1975، 1979.

الصنف	1975		1979	
	$س_{0ر}$	$ك_{0ر}$	$ك_{مر}$	$س_{مر}$
البندورة	53.2	24	105.4	50
الباذنجان	22	22	37.7	48
الفلفل	2.8	27	10.3	49
العنب	8.7	28	6.6	54
المجموع	86.7	101	160	201

جدول (9–7)

المطلوب: ايجاد الارقام القياسية المختلفة على اعتبار ان 1975 سنة اساس1979 سنة مقارنة.

الحل: نكون جدول الحل رقم (9–8)

الصنف	$ك_{مر} س_{مر}$	$ك_{مر} س_{0ر}$	$ك_{0ر} س_{مر}$	$ك_{0ر} س_{0ر}$
البندورة	52.70	2529.6	2660	1276.8
الباذنجان	1809.6	829.4	1056	484
الفلفل	504.7	278.1	137.2	75.6
العنب	356.4	184.8	469.8	243.6
المجموع	2732.4	3821.9	4323	2080

جدول (9–8)

ثم نبدأ بتطبيق العلاقات الرياضية واستخدام الجداول

(1) الرقم القياسي التجميعي البسيط للاسعار $= \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{مر}}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{0ر}} \times 100\% = \frac{201}{101} \times 100\% = \frac{20100}{101}$

$= 199\%$

(2) الرقم القياسي التجميعي البسيط للكميات $= \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ك_{مر}}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_{0ر}} \times 100\% = \frac{160}{86.7} \times 100\% = 184.54\%$

(3) رقم لاسبير للاسعار $= \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{مر}\, ك_{0ر}}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{0ر} . ك_{0ر}} \times 100\% = \frac{432300}{2080} \times 100\% = 207.84\%$

(4) رقم باش للاسعار $= \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{مر} . ك_{مر}}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{0ر} . ك_{مر}} \times 100\% = \frac{7940.7}{3821.9} \times 100 = 207.77\%$

(5) رقم فيشر للأسعار $= \sqrt{207.84 \times 207.77} = 207.8\ \%$

	$س_{0ر} \times \frac{ك_{مر}+ك_{0ر}}{2}$	$س_{مر} \times \frac{ك_{مر}+ك_{0ر}}{2}$	$\sqrt{ك_{مر} \times ك_{0ر}}$	$س_{0ر}\sqrt{ك_{مر} \times ك_{0ر}}$	$س_{مر}\sqrt{ك_{مر} \times ك_{0ر}}$
	1900.8	3960	74.88	1797.12	3744
	656.7	1432.8	28.8	633.6	1382.4
	176.85	320.95	5.37	144.99	263.13
	214.2	413.1	7.58	212.24	409.32
موع	2948.55	6126.85		2787.95	5798.85

جدول (9-9)

(6) رقم مارشال - ايدجورث للاسعار $= \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_{مر} \times \left(\frac{ك_{مر}+ك_{0ر}}{2}\right)}{\sum_{ر=1}^{ن} س_{0ر} \times \left(\frac{ك_{مر}+ك_{0ر}}{2}\right)} \times 100\%$

$= \frac{6126.85}{2948.55} \times 100\%$

%207.79 =

(7) رقم مارشال ايدجورث للوسط الهندسي للاسعار.

$$= \frac{\sum_{ر=1}^{ن} \text{س}_{1ر} \sqrt{\text{ك}_{1ر} \times \text{ك}_{0ر}}}{\sum_{ر=1}^{ن} \text{س}_{0ر} \sqrt{\text{ك}_{1ر} \times \text{ك}_{0ر}}} \times 100\% = \frac{5798.85}{2787.95} \times 100\%$$

%208 =

الوحدة العاشرة

الاحصاءات الحيوية

10-1 : تعريف الاحصاءات السكانية وأهميتها :

10-1-1 تعريف الاحصاء السكاني :

(الاحصاء السكاني هو الدراسة الاحصائية للسكان وخصائصهم وفعالياتهم وتغيراتهم من حيث التكاثر والوفاة والانتقال والعوامل التي تؤثر فيها والنتائج التي تنشأ عنها)

10-1-2) اهمية الاحصاء السكاني :

قبل الدخول في شرح اهمية الاحصاء السكاني لابد من تعريف السكان وهم مجموعة من الناس تعيش ضمن حدود بلد معين سواء كانوا يعيشون بصفة دائمة او مؤقتة.

وتنبع اهمية الاحصاء السكاني من انه يقوم بدراسة السكان وجمع البيانات المختلفة عنهم وهذه البيانات تعتبر مهمة جدا وخاصة بالنسبة لصانعي القرار والعمليات التخطيطية فالقرار الناجح هو القرار الذي يعتمد على معلومات دقيقة ونلاحظ بأن السكان هم مصدر النشاطات الاقتصادية والثقافية والصحية والاجتماعية وغيرها وهذه النشاطات مترابطة ويؤثر بعضها في بعض.

ويمكن الحصول على البيانات السكانية من مصدرين.

أ- **التعداد السكاني**: وهي عملية حصر الافراد في مكان محدد في لحظة معينة بهدف جمع البيانات التي تصف افراد المجتمع وهناك نوعان من التعداد:

1- التعداد النظري: وهو حصر الفرد في المكان الذي تعود ان يقيم فيه الشخص بشكل دائم بغض النظر عن مكان ووجوده الفعلي لحظة التعداد.

2- التعداد الفعلي: حصر الاشخاص في مكان وجودهم لحظة التعداد حتى ولو كان زائرا (تعداد واقعي).

وكان آخر تعداد للسكان هو في الاردن سنة 1976 ومن اهدافه تكوين خامات للدراسة والبحوث.

10-1-3) انواع البيانات التي يتم حصرها:

1) بيانات عن خصائص الافراد كالعمر، الجنس، والديانة.

2) بيانات عن تكوين الاسرة كالعدد والسكن.

3) بيانات عن الخصوبة مثل عدد المواليد للنساء المتوزجات والارامل.

- كيفية جمع البيانات:

1) تحديد الهدف.

2) وضع الوحدات الادارية على الخرائط ثم تحديدها على الارض.

3) تحديد اجزاء الوحدات الادارية الى قرية وقضاء.

4) ترقيم الطرق والالوية.

5) حصر المكان.

6) تقييم البيانات: وذلك عن طريق اضافة المواليد والضيوف الى البيانات في ليلة التعداد، وطرح الوفيات والغائبين في ليلة التعداد حتى نحصل على ارقام مطابقة للارقام في ليلة التعداد.

10-1-4) التحرك السكاني

والتحرك السكاني يحتوي على نوعين من التحركات هما التحرك الداخلي (الهجرة الداخلية) والتحرك الخارجي ويسمى بالهجرة الخارجية.

1- الهجرة الداخلية

وهي انتقال السكان من المناطق الريفية الزراعية الى المدن حيث توجد فيها المصانع

وهذا يتم في داخل البلد الواحد والدوافع للهجرة هي ما يلي:-

- الدوافع المادية كنقص في الموارد المحلية وضيق العيش مما يدفع عدد من السكان الى الانتقال الى حيث توجد الثروات الطبيعية وفرص العمل الجيدة والمغرية مما يؤدي الى رفع مستوى المعيشة وغالبا ما تكون هذه الاقاليم اكثر انتعاشا ورواجا مما يساعد السكان المهاجرين اليها في مما رسة اعمالهم التجارية ومزاولة المهن الحرة والحصول على اجور مرتفعة.

- الكثافة السكانية ويقصد بها ارتفاع عدد السكان في بعض الاقاليم نتيجة لعوامل اقتصادية او اجتماعية او ثقافية ففي هذه الحالة اما تلجأ الدولة الى توزيع السكان الى أقاليم اخرى اقل كثافة او ان يلجأ الافراد الى الهجرة الى اقاليم اخرى لتحسين ظروف معيشتهم.

- المناخ المختلف في الاقاليم المختلفة داخل البلد الواحد حيث ان معظم الناس يفضل الانتقال الى الاماكن ذات الطقس المعتدل.

- بعض الاقاليم داخل البلد الواحد تعتبر اكثر تطورا من غيرها بوجود المرافق العامة المتطورة والخدمات المتطورة مما يؤدي الى انتقال السكان الى هذه الاقاليم للاستفادة من الامتيازات الموجودة فيها.

اما الهجرة الداخلية فلا تأثير لها على عدد السكان.

2- الهجرة الخارجية

وهي انتقال السكان من بلد الى اخر ودوافع هذا النوع من الهجرة ما يلي:-

- دوافع اقتصادية - دوافع سياسية - طلبا للعلم

وهذا النوع من الهجرة توجد له اثاره على كل من البلد المرسل للمهاجرين والبلد المستقبل للمهاجرين ومن هذه الاثار مايلي:-

1) نقص عدد السكان في البلد المرسل وزيادته في البلد المستقبل.

2) تركيبة السكان من حيث العمر والجنس والمهنة في كل من البلد المرسل والبلد المستقبل.

مقاييس النمو السكاني

ان التغير في عدد السكان ينتج عن الزيـادة الطبيعيـة وهـي الفـرق بـين المواليـد وعـدد الوفيات بالاضافة الى صافي الهجرة الذي يشكل الفرق بين اعـداد المهـاجرين الى البلـد والمهاجرين منه ومن مقاييس النمو السكاني:

$$\text{معدل الزيادة الطبيعية} = \frac{\text{عدد المواليد الأحياء} - \text{عدد الوفيات}}{\text{اجمالي عدد السكان في منتصف السنة}} \times 1000 \qquad ...(1-10)$$

مثال (10−1) : اذا كان عدد المواليد احياء في احدى البلـدان 300000 وكـان عـدد السكان في منتصف السنة 10.000.000 وعدد الوفيات 100000 فالمطلوب اسـتخراج معدل الزيادة الطبيعية لهذا البلد.

$$\text{معدل الزيادة الطبيعية} = \frac{300000-100000}{10000000} \times 1000$$

$$= \frac{200000}{10000000} \times 1000 = 20 \text{ بالألف}$$

10-2) التقديرات السكانية وايجادها باستخدام نظام المتوالية العددية :

الافتراض في هذا النظام ان السكان يتزايدون او يتناقصون بمقدار عددي ثابت من سنة لاخرى في الفترةالفاصلة بين تعدادين للسكان. ولتقدير عـدد السـكان فاننـا نسـتخدم الصيغة التالية:−

ح = ع$_1$ + (ن−1)ز ....(2−10)

حيث ان   ح= التعداد اللاحق   ع$_1$= التعداد الاول

ن= عدد السنوات بضمنها سنة التعداد الاول

ز= المقدار الثابت للزيادة السكانية (اساس المتوالية العددية)

مثال (10–2): اذا كان عدد سكان بلد ما عام 1960، 1970 على التتابع 3 ملايـين، 3.8 مليون

المطلوب تقدير حجم السكان عام 1980 باتباع نظام المتوالية العددية.

الحل: نحتسب اولا كمية الزيادة السنوية الثابتة (ز)

3.8=3+(11−1)ز

3.8=3+10ز

3.8−3=10ز

0.8=10ز

$$ز=\frac{0.8}{10}=0.08$$

والان نقدر عدد السكان عام 1980

$ح_{80}$=3+(21−1)0.08

$ح_{80}$=3+20×0.08

$ح_{80}$=3+1.6=4.6 مليون

ب– المصدر الثاني للبيانات السكانية هو الاحصاءات الحيوية

10–3) احصائيات الوفيات

يوجد عدة عوامل تؤثر على الوفيات اهمها:

1– الحروب ومضاعفاتها الصعبة

2– المجاعات والامراض المعدية ترفع اعداد الوفيات

3- التقدم الحضاري والصحي يخفض معدل الوفيات ومن اهم معدلات الوفيات ما يلي:-

$$\text{أ- معدل الوفيات الخام} = \frac{\text{اجمالي عدد الوفيات عدا المواليد الموتى}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times 1000 \quad ..(3-10)$$

مثال (10-3): اذا كان عدد الوفيات عد المواليد موتى 100000 وكان عدد السكان في منتصف العام 8.000.000 فاحسب معدل الوفيات الخام بالالاف.

$$\text{معدل الوفيات الخام} = \frac{100000}{8000000} \times 1000 = 12.5 \text{ بالألف}$$

$$\text{ب) معدل وفيات الأمومة} = \frac{\text{عدد وفيات النساء أثناء الحمل والولادة}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times 1000 \quad ..(4-10)$$

مثال (10-4) : اذا كان عدد المواليد الاحياء في محافظة ما 250000 وعدد وفيات النساء اثناء الحمل والولادة 2000 فاحسب معدل وفيات الامومة.

$$\text{معدل وفيات الامومة} = \frac{2000}{250000} \times 1000 = 8 \text{ بالألف}$$

$$\text{جـ) معدل وفيات الأطفال الرضع لاقل من سنة} = \frac{\text{عدد وفيات الأطفال الرضع}}{\text{عدد المواليد الأحياء}} \times 1000 \quad ..(5-10)$$

مثال (10-5) : اذا كان عدد وفيات الاطفال الرضع (الاقل من سنة) 5000 وكان عدد المواليد الاحياء 250000 حسب معدل وفيات الاطفال الرضع

$$\text{معدل وفيات الاطفال الرضع} = \frac{5000}{250000} \times 1000 = 20 \text{ بالألف}$$

$$\text{د) معدل وفيات الاطفال حديثي الولادة (اقل من شهر)} = \frac{\text{عدد الوفيات لعمر أقل من 28 يوم}}{\text{عدد المواليد الأحياء}} \times 1000 \quad ...(6-10)$$

مثال (10-6): اذا كان عدد الاطفال المتوفين من أعمار 28 يوما فأقل يساوي وعدد المواليد احياء 250000 فاحسب معدل وفيات الاطفال حديث الولادة.

الحل : معدل وفيات الاطفال حديثي الولادة= $\frac{150}{250000} \times 1000 = 0.6$ بالألف

$$\text{هـ) معدل وفيات الطفولة المبكرة} = \frac{\text{عدد الوفيات (من 28 يوم الى 11 شهر}}{\text{عدد المواليد الأحياء - عدد الوفيات اقل من 28 يوم}} \times 1000 \quad ...(7-10)$$

مثال (10-7): اذا كان عدد وفيات الاطفال في سن مبكرة (28 يوما الى 11 شهرا) 2500 وعدد المواليد احياء 230470 وعدد الوفيات في السن الاقل من 28 يوما 470 وفاة احسب معدل وفيات الطفولة المبكرة.

الحل : معدل وفيات الطفولة المبكرة=

$$= \frac{2500}{230470 - 470} \times 1000 = \frac{2500000}{2300000} = 10.9 \approx 11$$ بالألف

10-4) احصائيات الخصوبة:

وتقسم الى مجموعتين رئيسيتين:

أ- معدلات ونسب المواليد

ب - مقاييس النمو السكاني

أ - معدلات ونسب المواليد:

وتحتوي على المعدلات التالية:

$$\text{1) معدل المواليد الخام} = \frac{\text{عدد المواليد احياء خلال السنة}}{\text{عدد السكان في نصف سنة}} \times 1000 \quad ....(8-10)$$

مثال (10–8) : اذا كان عدد المواليد احياء خلال عام 1985 في احدى المحافظات (30000) وعدد السكان في هذه المحافظات (400000) فأوجد معدل المواليد الخام لكل 1000 نسمة من السكان.

الحل : معدل المواليد الخام = $\frac{30000}{400000} \times 1000 = 75$ بالألف

2) معدل الخصوبة العام = $\frac{\text{عدد المواليد احياء خلال السنة}}{\text{عدد الاناث في سن الحمل في منتصف السنة}} \times 1000$ ...(10–9)

مثال (10–9) : اذا كان عدد المواليد احياء خلال السنة 80000 في احدى البلدان وكان عدد الاناث في سن الحمل في منتصف السنة يساوي 900000 فأوجد معدل الخصوبة العام.

الحل : معدل الخصوبة العام = $\frac{80000}{90000} \times 1000 = 88.9$ بالألف

3) معدل الخصوبة للنساء المتزوجات = $\frac{\text{عدد المواليد أحياء خلال السنة}}{\text{عدد النساء المتزوجات والأرامل والمطلقات في منتصف نفس السنة}} \times 1000$ ..(10–10)

مثال (10–10) : اذا كان عدد المواليد احياء خلال السنة 100000 في احدى البلدان وكان عدد النساء المتزوجات والأرامل والمطلقات في منتصف نفس السنة يساوي 1500000 فأوجد معدل الخصوبة للنساء المتزوجات.

معدل الخصوبة للنساء المتزوجات = $\frac{100000}{150000} \times 1000 = 66.7$ بالألف

4) معدل الخصوبة حسب فئات العمر = $\frac{\text{عدد المواليد الاحياء لفئة سن معينة}}{\text{عدد الاناث في نفس فئة السن في منتصف السنة}} \times 1000$.(11-10)

مثال (10-11):اذا كان عدد المواليد الأحياء 200000 والتي أنجبتها 2000000 سيدة في فئة السن 20 - 25 سنة في احدى البلدان فأوجد معدل الخصوبة حسب فئة السن 20 - 25

الحل : معدل الخصوبة حسب فئة السن 20 - 25 = $\frac{200000}{2000000} \times 1000 = 100$ بالألف

5) الخصوبة الكلية (النظرية) = $\frac{\text{المواليد الأحياء}}{\text{عدد الاناث في سن الانجاب}} \times 1000$ ......(10-12)

مثال (10-12): اذا كان عدد المواليد احياء في بلد ما (300000) وعدد الاناث في سن الانجاب 3.000.000 فأوجد معدل الخصوبة الكلية

الخصوبة الكلية = $\frac{300000}{3000.000} \times 1000 = 100$ بالألف

المراجع

مقدمة في الأساليب الاحصائية، د. شفيق العتوم ، 1992.

أسس علم الاحصاء، عزام صبري وعلي أبو شرار، 1991.

علم الاحصاء نظريات وتطبيقات، عزام صبري وعلي أبو شرار، 1990.

مبادئ الاحصاء للمهن التجارية، كامل فليفل وفتحي حمدان، 1995.

مبادئ

الإحصاء

دار صفاء للطباعة والنشر والتوزيع

عمان - شارع الملك حسين - مجمع الفحيص التجاري - تلفاكس 4612190

ص.ب 922762 عمان 11121 الأردن



يطلب من

مكتبة الرازي العلمية

أبوظبي - هاتف 678122 فاكس 678121

ص.ب 42373 أبوظبي - الإمارات العربية المتحدة

ردمك ISBN 9957 - 402 - 40 -3